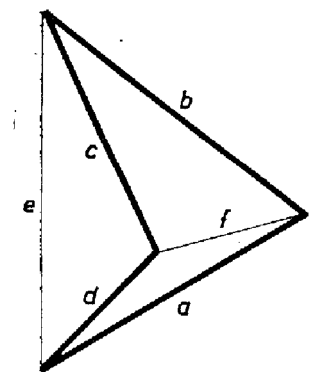
I. Mindegyik átló két háromszögre vágja szét a négyszöget. Ezekben a háromszög–egyenlőtlenség alapján az 1. ábra jelöléseit használva

$$a+b>e,\quad a+d>f,$$
$$c+d>e,\quad b+c>f.$$

Adjuk össze az ugyanazon átlót tartalmazó 2–2 egyenlőtlenséget, majd szorozzuk az így adódó (nyilvánvalóan helyes) egyenlőtlenségeket a bennük szereplő átlóval Az átló pozitív, tehát a szorzások után is helyes egyenlőtlenségeket kapunk:

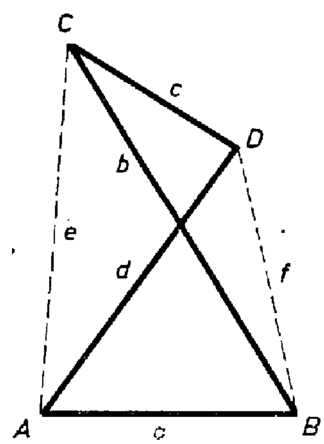
$$(a+b+c+d)e>2e^2,\quad (a+b+c+d)f>2f^2.$$

Az (1) állítás ezek összeadásával és kellő kiemelésekkel adódik.



1. ábra

Az állítás konkáv négyszögre is igaz, sőt hurkolt négyszögre is, az utóbbi esetben átlókon azokat a szakaszokat értve, melyeknek végpontjai a nem szomszédos A és C, ill. B és D csúcs-párok (2. ábra).



2. ábra

II. A $PQRST$ ötszög 3–3 egymás utáni csúcsával meghatározott háromszögeket 2–2 szomszédos ötszögoldal és egy átló határolja. Ezért

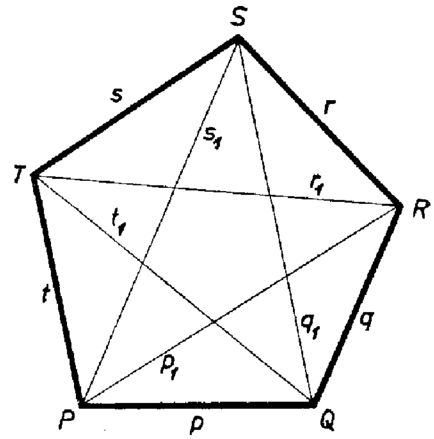
(3)
$$p+q>p_1,\qquad q+r>q_1,\qquad r+s>r_1,$$
$$s+t>s_1,\qquad t+p>t_1.$$

Avégett, hogy megkapjuk az átlók négyzetösszegét, szorozzuk meg a felírt egyenlőtlenségek mindkét oldalát a jobb oldalukon szereplő átlóval, majd adjuk össze az így kapott egyenlőtlenségeket:

$$p_1(p+q)+q_1(q+r)+r_1(r+s)+s_1(s+t)+$$
$$+t_1(t+p)>p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2+t_1^2.$$

A végzett átalakításokkal mindig a bal oldalon kaptunk nagyobb számot, mert az átlók mértékszámai pozitívok. A bal oldalon kapott összeg azonos az állítás (2) kifejezésével, csupán alakban különböznek, itt ugyanis a bal oldal az átlók szerint van rendezve, (2) pedig az oldalak szerint. – Ezzel az állításokat bebizonyítottuk.

Legányi András (Tatabánya, Árpád g. I. o. t.)



3. ábra

Megjegyzés. Az ötszögre is kaphatunk az (1)-hez hasonló egyenlőtlenségeket, ha azt is felírjuk, hogy az 1–1 csúcs elhagyásával adódó négyszögekben a 3 egymás utáni ötszögoldal összege nagyobb, mint a szabad végpontjaikat összekötő átló. Pl. az $RSTP$ négyszögben

$$r + s + t > p_1,$$

ezt (3) első egyenlőtlenségével összeadva kapjuk, hogy az ötszög (bármelyik) átlója kisebb a k kerület felénél:

$$k > 2p_1, \quad p_1 < k/2.$$

Ezt mindegyik átlóra felírva kellő szorzás és összeadás után

$$k(p_1 + q_1 + r_1 + s_1 + t_1) > 2(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2 + t_1^2).$$