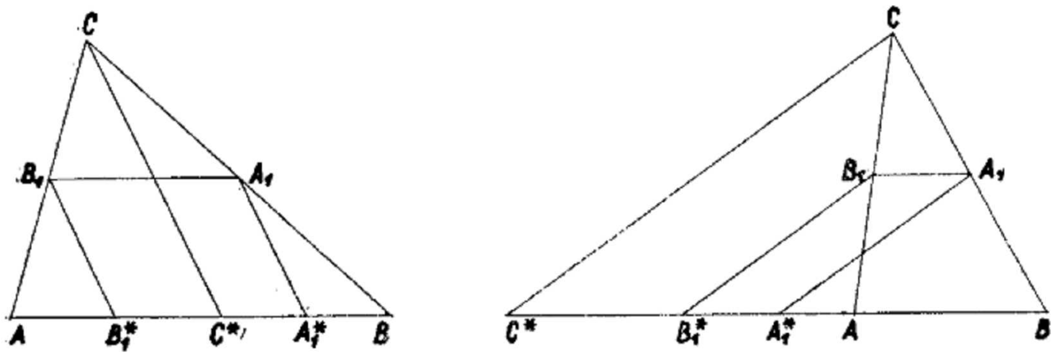


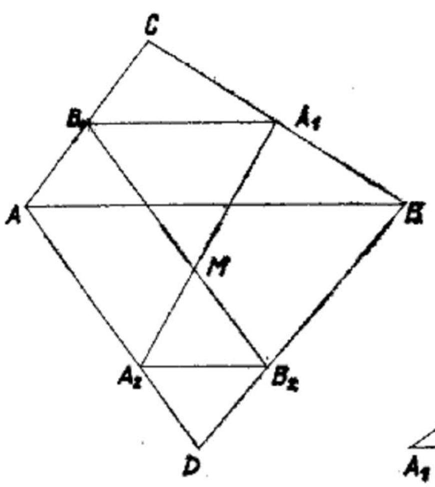
1. ábra

Vizsgáljuk az A_1A_2 és a B_1B_2 egyenesek metszéspontját.

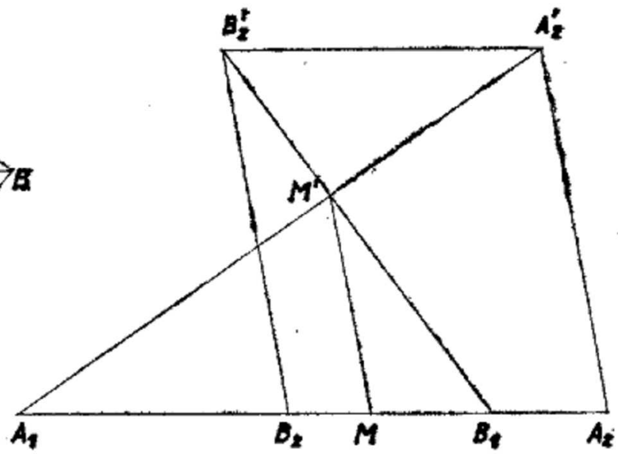
Az A_1B_1 szakasz párhuzamos AB-vel, feleakkora és ellenkező irányú. Ez ismeretes, ha A, B, C nincsenek egy egyenesen; az AB egyenesen levő C^* pont esetén pedig válasszunk egy nem az AB egyenesen levő C pontot, ahhoz rajzoljuk meg az A_1 és B_1 pontokat (1. ábra). Ekkor $A_1A_1^*$ és $B_1B_1^*$ mint középvonalak a BCC^*, ill. ACC^* háromszögbeli, egy irányban párhuzamosak CC^*-gal, így $A_1B_1B_1^*A_1^*$ paralelogramma, tehát A_1B_1-gyel együtt $A_1^*B_1^*$ is (ami az AB egyenesen van) fele akkora, mint AB, és azzal ellenkező irányú.

Az A_2B_2 szakasz AB-ből úgy keletkezik, hogy azt D-ből mint külső hasonlósági pontból $1/3$ arányban kicsinyítjük, így A_2B_2 is párhuzamos AB-vel, harmad akkora és egyező irányú vele.

Ezek szerint A_1B_1 és A_2B_2 párhuzamosak és ellenkező irányúak. Ha A_1B_1 és A_2B_2 nincs egy egyenesen, akkor A_1A_2 és B_1B_2 az A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek közti síksávban metszi egymást (2. ábra), M metszéspontjukra $A_1MB_1\triangle \sim A_2MB_2\triangle$, a hasonlóság aránya $A_1B_1/A_2B_2 = (AB/2)/(AB/3) = 3/2$. Így M az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszt egyaránt $3/2$ arányban osztja.



2. ábra



3. ábra

Ha az A_1, A_2, B_1, B_2 pontok egy egyenesre esnek (3. ábra), akkor A_1A_2 és B_1B_2 metszéspontja határozatlan, de létezik egy egyértelműen meghatározott M pont, amely mindkét szakaszt $3/2$ arányban osztja. Válasszunk ugyanis egy A_2B_2-vel párhuzamos, egyirányú és egyenlő $A_2'B_2'$ szakaszt. Ekkor az előző meggondolás alapján belátható, hogy az A_1A_2' és B_1B_2' szakaszok M' metszéspontja mindkettőt $3/2$ arányban osztja. Messe az M'-n át A_2A_2'-vel párhuzamosan húzott egyenes az A_1A_2 egyenest M-ben. Mivel $A_1MM'\triangle \sim A_1A_2A_2'\triangle$, és $B_1MM'\triangle \sim B_1B_2B_2'\triangle$, így M az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszt szintén $3/2$ arányban osztja. – Világos, hogy ha A_1 és A_2, vagy B_1 és B_2 egybeesik, akkor M is egybeesik velük.

Ha B, B_1, B_2 szerepét rendre C, C_1, C_2-nek adjuk át, akkor meggondolásunk azt adja, hogy az A_1A_2 és C_1C_2 szakaszt $3/2$ arányban osztó pont egybeesik, így az M pont az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 szakaszok mindegyikét $3/2$ arányban osztja, M tehát egyeneseik közös pontja. Azt is nyertük, hogy M az A_1, B_1, C_1 és az A_2, B_2, C_2 pontokból álló alakzatok hasonlósági pontja, az előbbi $2/3$ arányú kicsinyítéssel és $180°$-os elforgatással az utóbbiba megy át.

Nem határozott pl. az A_1A_2 egyenes, ha A_2 egybeesik A_1-gyel; ez bekövetkezik, ha D az AA_1 szakasz A_1-en túli meghosszabbításán van és $AD = 3\,AA_1/2$. Ilyenkor B_1B_2 és C_1C_2 az egybeeső pontban metszik egymást, hiszen ezen át pl. AB-vel csak egy párhuzamos húzható, és azon A_1 miatt rajta van B_1, és A_2 miatt rajta van B_2.

Előfordulhat, hogy a vizsgálandó három egyenes nem mind különböző, ha pl. A, B, C nem mind különbözők, vagy ha A, B, C, D egy egyenes pontjai. Az ilyen esetek felsorolása felesleges, mert ilyenkor az állítás semmitmondó.

Szabó Zoltán (Győr, Benedek–rendi Czuczor G. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Nem jutunk a fentitől lényegesen különböző megoldáshoz, ha azt látjuk be, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek hasonlók és hasonló helyzetűek. Ekkor azonban az egy egyenesen levő A, B, C pontok esete okoz egy kicsit több bonyodalmat. (Számos dolgozat ezzel az esettel nem foglalkozott.)

Nem nehéz belátni, hogy S-sel jelölve az ABC háromszög súlypontját, $A_1D \parallel A_2S$ és $B_1D \parallel B_2S$, így az A_1B_1D és A_2B_2S is hasonló helyzetű háromszögek, hasonlósági pontjuk szintén M; így S, D és M (az ABC és $A_1B_1C_1$, ill. ABC és $A_2B_2C_2$, ill. $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögpárok hasonlósági pontjai) is egy egyenesen van. Az utolsó állítás akkor is igaz marad, ha ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ tetszés szerinti hasonló helyzetű háromszögek; bizonyítása azonban sokkal nehezebb.