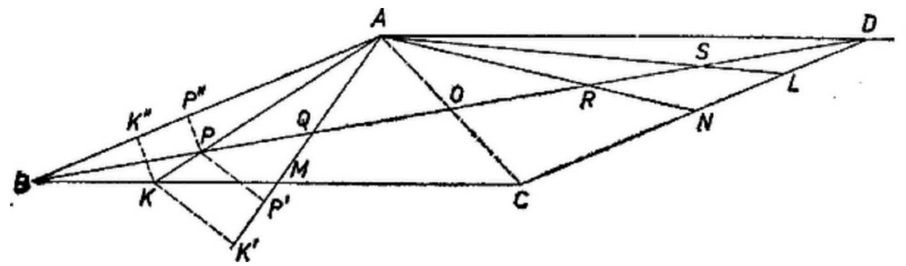
I. megoldás. Legyen a BM és ND szakasz felezőpontja K, ill. L, és messe a BD átlót az AK, AM, AN, AL egyenes rendre a P, Q, B, S pontban. A PBK és a PDA háromszögek hasonlók, ebből

$$PB : PD = BK : DA = BK : BC = 1 : 4,$$

így BP a BD átlónak $1/5$ része.



Hasonlóan a QBM és QDA háromszögek hasonlóságából

$$QB : QD = BM : BC = 1 : 2,$$

így $BQ = BD/3$. Eszerint $PQ = BQ - BP = 2\,BD/15$. Ugyanígy látható, hogy $SD = BP = BD/5$, $RS = PQ = 2\,BD/15$, végül $QR = BD - BQ - RD = BD/3$.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. II. o.t.)

II. megoldás. Húzzuk meg a paralelogramma AC átlóját és jelöljük a felezőpontját O-val. Ekkor az ABC háromszögben AM és BO súlyvonalak, Q a súlypont, ezért $BQ = 2\,BO/3 = BD/3$. Hasonlóan $RD = BD/3$, és így $QR = BD/3$.

Az APQ és ABP háromszögek A-ból húzott magassága közös, ezért alapjaik $PQ : BP$ aránya megegyezik területeik arányával. A területeket a közös P csúcsból húzott PP', ill. PP'' magassággal fogjuk kifejezni. Húzzunk még K-ból is KK' ill. KK'' merőlegest AQ-ra, ill. AB-re. Ekkor a $PP'P''$ és $KK'K''$ háromszögek hasonlók, mert az előbbit A-ból úgy nagyítva, hogy P a K-ba, P' pedig K'-be kerüljön, P'' az AP'' és a K-ból PP''-vel párhozamosan húzott egyenes metszéspontjába kerül, ez pedig K''. Így

$$PP' : PP'' = KK' : KK''.$$

Ezt felhasználva a PQ:BP arány így alakítható át:

$$\frac{PQ}{BP} = \frac{APQ}{APB} = \frac{AQ \cdot PP'}{AB \cdot PP''} = \frac{AQ \cdot KK'}{AB \cdot KK''} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AM \cdot KK'}{AB \cdot KK''} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AMK}{ABK} = \frac{2}{3}$$

(3 betű egymás után írásával a megfelelő háromszög területét jelöltük). Ismét felhasználtuk, hogy Q az ABC háromszög súlypontja, továbbá hogy az ABK és AKM háromszögek alapjai egyenlők, magasságuk közös. Eszerint $PQ = 2\,BQ/5 = 2\,BD/15$ és $BP = 3\,BQ/5 = BD/5$.

Béres László (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. M, ill. K helyett a BC oldal tetszés szerinti X pontját, továbbá az AX és BD egyenesek Y metszéspontját véve BY-t a fenti eljárással kifejezhetjük BD-vel és a $BX : XC = \lambda$ osztásaránnyal: $BY = \lambda \cdot BD/(2\lambda + 1)$. Az M pontra $\lambda = 1$, K-ra pedig $\lambda = 1/3$.

Ezen a módon a BC egyenes minden pontjához hozzárendelhető a BD egyenes egy pontja – kivéve C-nek B-re vett tükörképét, és BD minden pontjához BC egy pontja, kivéve D-t. A BC és BD egyeneseken levő pontsorok között rokonság jött létre.[1]

V. L.

[1] Ezekről bővebben olvashat az érdeklődő a következő könyvben: *Vigassy Lajos:* Geometriai transzformációk (Tankönyvkiadó, Budapest, 1963)