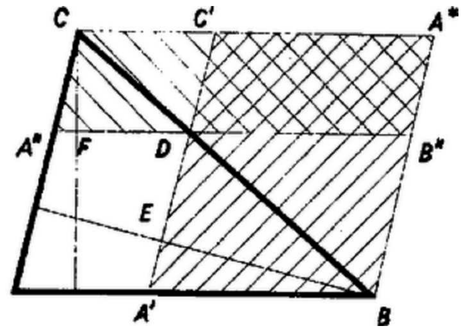
I. megoldás. Húzzunk párhuzamost B-n át AC-vel és C-n át AB-vel, és jelöljük metszéspontjukat A^*-gal. Az ABA^*C paralelogramma területe kétszer akkora, mint az ABC háromszögé, ezért elég azt belátnunk, hogy a kérdéses összeg megadja a paralelogramma területét.



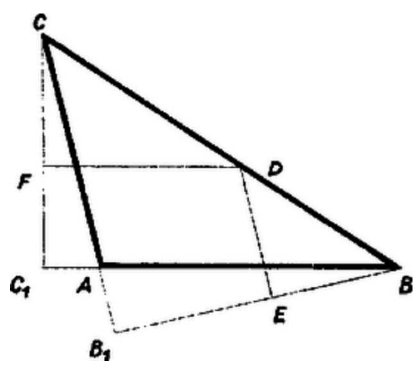
1. ábra

Húzzuk meg a DE egyenesnek a paralelogrammába eső szakaszát, legyen ennek végpontja az AB oldalon A', a CA^* oldalon C'. (Ha az ABC háromszögben C-nél derékszög van, akkor E azonos D-vel, ekkor D-n át merőlegest húzunk BC-re, ami egyszersmind párhuzamos AC-vel.) Hasonlóan legyen a DF egyenesnek (ill. $CBD\sphericalangle = 90^\circ$ esetén a D-ben BC-re állított merőlegesnek) AC-vel, ill. BA^*-gal való metszéspontja A'', ill. B''. Nyilvánvaló, hogy $A''B''$ párhuzamos és egyenlő hosszú AB-vel, ugyanígy $A'C'\#AC$. A CF szakasz az $A''B''A^*C$ paralelogramma magassága, ezért a szóban forgó $AB \cdot CF$ szorzat megadja ezen paralelogramma területét, az $AC \cdot BE$ szorzat pedig hasonlóan az $A'BA^*C'$ paralelogramma területét.

Mindkét paralelogramma lefedi az ABA^*C paralelogramma egy részét és abból nem nyúlik ki. Együttesen kétszer fedik le a $DB''A^*C'$ paralelogrammát, másrészt az ABA^*C paralelogrammából lefedetlenül hagyják az $AA'DA''$ paralelogrammát. Így elég belátnunk, hogy a kétszer fedett és a fedetlen paralelogramma területe egyenlő. Ez pedig következik abból, hogy e két paralelogramma az egyenlő területű A^*CB és ABC háromszögekből a $C'CD$ és $B''DB$ ill, az $A''DC$ és $A'BD$ háromszögek elhagyásával keletkezik, ezek pedig páronként egyenlő területűek, mert az $A''DC'C$, ill. $A'BB''D$ paralelogrammának a DC ill. BD átló mentén való kettévágásával keletkeznek.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Kovács Piroska (Székesfehérvár, Teleki B. g. II. o. t.)



2. ábra

II. megoldás. DE párhuzamos AC-vel, mert mindkettő merőleges a B-ből húzott magasságvonalra, ezért a BDE háromszög hasonló BCB_1-hez, ahol B_1 a B-ből húzott magasság talppontja. Így

(1) $$BE = \frac{BD}{BC} \cdot BB_1, \quad \text{és}$$

(2) $$AC \cdot BE = \frac{BD}{BC} \cdot AC \cdot BB_1 = \frac{BD}{BC} \cdot 2t,$$

ahol t az ABC háromszög területe. Ugyanígy

(3) $$AB \cdot CF = AB \cdot CC_1 \frac{DC}{BC} = \frac{DC}{BC} \cdot 2t,$$

és a bizonyítandó állítás (2) és (3) összeadásával adódik, ugyanis D a BC oldal közbülső pontja, és így

$$\frac{BD}{BC} + \frac{DC}{BC} = 1.$$

Ha az ABC háromszögben pl. C-nél derékszög van, akkor $E \equiv D$, $B_1 \equiv C$, és (1) csak jelölésbeli változást jelent.

Eszter István (Pannonhalma, Benedek-rendi g. I. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás a BC oldalegyenes bármely D pontjára érvényes; ha a CF, BE szakaszoknak előjelet tulajdonítunk, pozitívnak véve a felhasznált magasságegyeneseken a B-ből B_1-be, ill. C-ből C_1-be vivő irányt.