Legyen egy bizonyos árumennyiség beszerzési ára B, eladási ára a haszon és a költségek hozzáadásával E, vagyis nyilván $E > B$. Így az alulról számított a és a felülről számított f haszonkulcs:

$$a = 100\frac{E-B}{B} = 100\left(\frac{E}{B} - 1\right)\%, \tag{1}$$

$$f = 100\frac{E-B}{E} = 100\left(1 - \frac{B}{E}\right)\%. \tag{2}$$

1) Ha mármost adott az a haszonkulcs, akkor átrendezéssel az E/B arány, majd a reciproka

$$\frac{E}{B} = \frac{a}{100} + 1 = \frac{a+100}{100}, \quad \frac{B}{E} = \frac{100}{a+100},$$

tehát a felülről számított haszonkulcs

$$f = 100\left(1 - \frac{100}{a+100}\right) = \frac{100a}{a+100}\%, \tag{3}$$

és ez valóban független B-től is, E-től is, csak a-tól függ.

Megfordítva: a B/E arányt (2)-ből kifejezve, majd (1)-be helyettesítve

$$\frac{B}{E} = 1 - \frac{f}{100} = \frac{100-f}{100}, \quad a = 100\left(\frac{100}{100-f} - 1\right) = \frac{100f}{100-f}.$$

A $100 - f$ nevező nyilván 0-tól különböző, hiszen $f = 100\%$ azt jelentené, hogy az eladási ár minden fillérje haszon, vagyis $B = 0$, ekkor nem volna értelme a számításának.

2) Megjegyezzük, hogy mindig $a > f$, mert az $E - B$ haszon a kisebb B-hez viszonyítva nagyobb százalékot tesz ki, mintha a nagyobb E-hez hasonlítjuk. Így a vizsgálandó $a - f$ különbség pozitív.

(3)-ból a törtet eltávolítva azt látjuk, hogy a csak a-t és a csak f-et tartalmazó tag együtthatója a két oldalon ugyanaz, ezért az $a - f$ különbség kifejezhető a szorzattal:

$$af + 100f = 100a, \qquad af = 100(a-f), \qquad a - f = \frac{af}{100},$$

és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Horváth Géza (Esztergom, I. István g. II. o. t.)