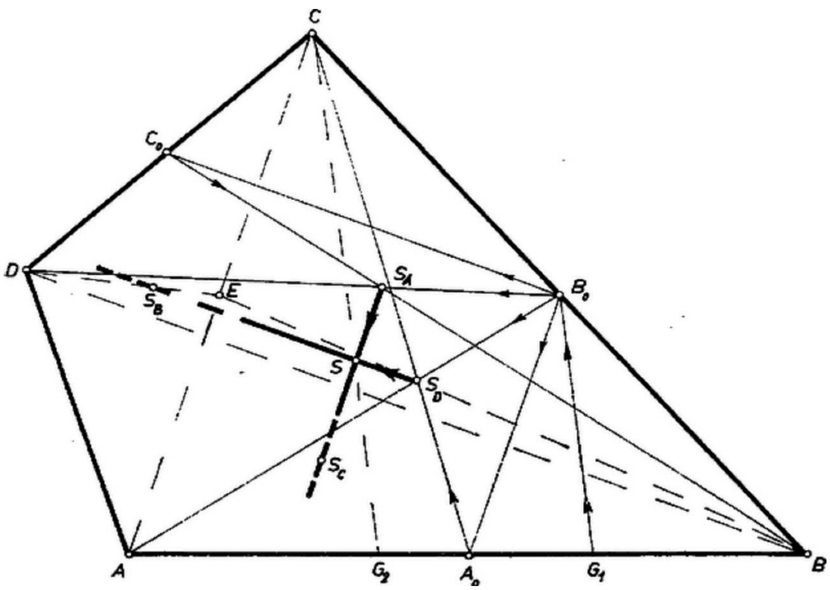
I. S_D és S_B közül elég egyiküket megszerkeszteni, mert összekötő egyenesük párhuzamos a BD átlóval, tehát pl. S_D ismeretében csúsztatással megrajzolható. Ha ugyanis az AC átló felezőpontja E, akkor S_B harmadolja az ED súlyvonalat, S_D pedig EB-t, ezért ES_DS_B és EBD az E középpontra nézve hasonló helyzetű háromszögek, és bennük S_DS_B és BD megfelelő oldalak. Ugyanígy $S_AS_C \parallel CA$, elég lesz pl. S_A-t megszerkesztenünk.



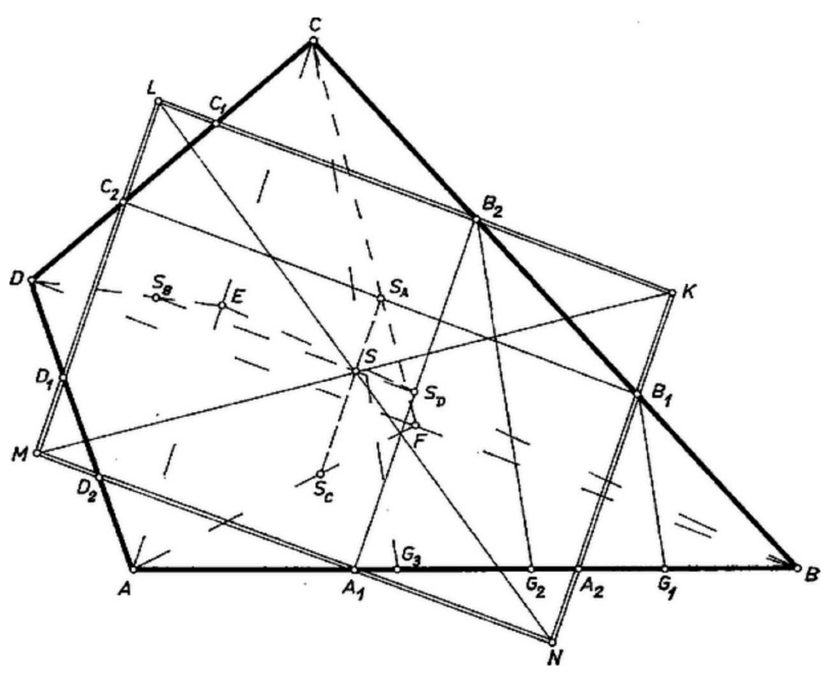
1. ábra

S_D és S_A megszerkesztéséhez elég előállítanunk az ABC, ill. BCD háromszög két–két súlyvonalát. E háromszögek BC oldala közös, ennek B_0 felezőpontját ismerve meghúzhatjuk az AB_0, ill. DB_0 súlyvonalat, másrészt a háromszögek B_0-on átmenő valamelyik középvonalával megkaphatjuk egy–egy további oldalfelező pontjukat, abból pedig egy–egy további súlyvonalukat. Az 1. ábrán az AB oldal A_0 és a CD oldal C_0 felezőpontját használtuk fel a CA_0, ill. BC_0 súlyvonal megrajzolásához.

B_0 megszerkesztéséhez elég ismernünk egy pl. a B-n átmenő tetszés szerinti (de BC-től különböző) t egyenesnek két, egymás után csatlakozó, egyenlő szakaszát, ha az első szakasz kezdőpontja B. Ha ugyanis a két szakasz $BG_1 = G_1G_2$, akkor a G_1-en átmenő CG_2-vel párhuzamos egyenes BC-ből kimetszi B_0-t. t gyanánt a már meglevő BA egyenest használva egy egyenest megtakaríthatunk, feltéve, hogy az $ABCD$ négyszög oldalszakaszai meg vannak rajzolva.

Ezek szerint a BA oldal felénél nem nagyobb BG_1 szakasznak BA-ra való kétszeri felmérése után a következő 9 egyenes meghúzásával kapjuk S-et (a zárójelben beiktatott egyeneseket a vonalzó csúsztatása céljára beállítjuk, de nem rajzoljuk meg):

$$(G_2C),\ G_1B_0;\ \ (CA),\ B_0A_0;\ \ (BD),\ B_0C_0;\ \ B_0A,\ A_0C;\ \ B_0D,\ C_0B;$$
$$(CA),\ S_AS_C;\ \ (BD),\ S_DS_B.$$



2. ábra

II. A $KLMN$ négyszög paralelogramma (2. ábra), mert A_2BB_1 és ABC a B középpontra vonatkozóan hasonló helyzetű háromszögek, ezért $A_2B_1 \parallel AC$, hasonlóan $D_1C_2 \parallel AC$, így $A_2B_1 \parallel D_1C_2$, más jelöléssel $NK \parallel ML$, továbbá ugyanígy $KL \parallel MN \parallel BD$. Az eljárás S gyanánt a paralelogramma középpontját jelöli meg, ezért helyességének bizonyítására elég megmutatnunk, hogy az I. rész S_AS_C és S_BS_D egyenesei átmennek a paralelogramma középpontján.

Az előzőkhöz hasonlóan $B_1C_2 \parallel BD \parallel KL$, továbbá a B_1C_2 egyenes a C csúcson átmenő és a BD átlót metsző egyeneseknek az átló és a csúcs közé eső szakaszát szerkesztésénél fogva harmadolja, így átmegy a BCD háromszög S_A súlypontján. Másrészt S_A felezi a B_1C_2 szakaszt, mert a CS_A súlyvonal, ami felezi a BD alapot, felezi a BD-vel párhuzamos egyeneseknek a BCD szög szárai közé eső szakaszát is. Így S_A rajta van a $KLMN$ paralelogramma KN-nel párhuzamos középvonalán. Másrészt láttuk, hogy S_AS_C párhuzamos AC-vel, és így KN-nel is, tehát azonos a paralelogramma KN-nel párhuzamos középvonalával. Így átmegy a paralelogramma középpontján. Hasonlóan S_BS_D azonos a KL-lel párhuzamos középvonallal, tehát szintén átmegy a paralelogramma középpontján, és ezt akartuk bizonyítani.

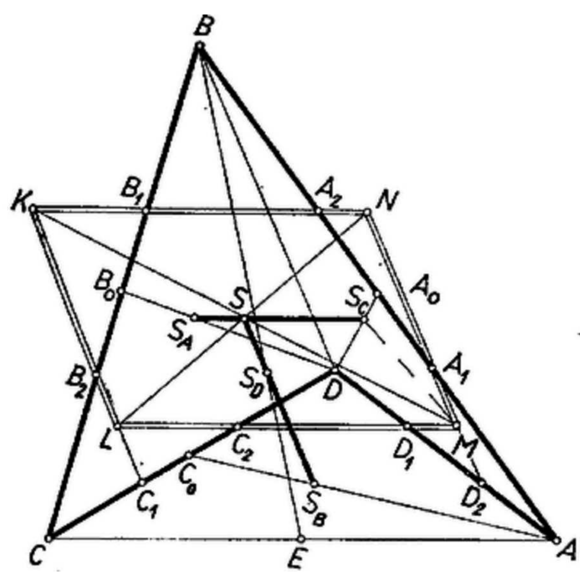
Ennek alapján S megszerkesztése a fentebbi szerkesztéshez hasonlóan az alábbi 10 egyenes meghúzásával (ill. a zárójelbe tett egyenesek előzetes beállításával) történhet, ahol G_1, G_2, G_3 a BA oldal olyan három pontja, melyekre $BG_1 = G_1G_2 = G_2G_3$.

$$(G_3C),\ G_1B_1,\ G_2B_2;\ \ (CA),\ KB_1N,\ B_2A_1;\ \ (BD),\ B_1C_2,\ KB_2L,\ NA_1M;$$
$$(CA),\ LC_2M;\ \ KM;\ LN.$$

Malatinszky Géza (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha a négyszögnek csak a csúcsai vannak kijelölve, akkor az oldalak közül elég hármat megrajzolni. A fenti szerkesztésekben a DA oldalnak sem a felezőpontját, sem a harmadoló pontjait nem használtuk fel.

2. Belátható, hogy az állítás és a szerkesztések konkáv négyszögre is érvényesek (3. ábra).



3. ábra