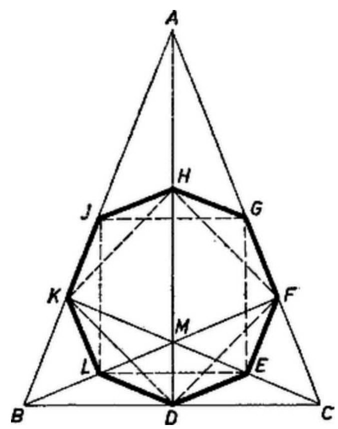
I. megoldás. Legyen az A, B, C csúcsból húzott magasság talppontja rendre D, F, K, a magasságpont M, az MA, MB, MC szakasz felezőpontja rendre H, L, E, végül az AB, AC szár felezőpontja J, ill. G. Be fogjuk látni, hogy ezek a $DEFGHJKL$ sorrendben egy szabályos nyolcszög egymás utáni csúcsai. A nyolcszög szimmetrikus a háromszög AD tengelyére, más szóval a HD átlóra, ezért szabályos voltának bizonyításához elég megmutatni, hogy egyrészt DE, EF, FG és GH oldalai egyenlők, másrészt a D, E, F és G csúcsnál levő szögei, 135°-osak.



A háromszög ACB szöge 67,5° és az AKC derékszögű háromszögből $ACK\sphericalangle = 45°$, ezért $KCB\sphericalangle = ECD\sphericalangle = 22{,}5°$. CDM és CFM derékszögű háromszögek, ezért D és F a közös CM átfogó fölötti Thalész-kör pontjai. E kör középpontja E, tehát $DE = EF = EC = EM$; az ECD egyenlő szárú háromszögből egyrészt $EDC\sphericalangle = 22{,}5°$, $MDE\sphericalangle = 67{,}5°$, és így $LDE\sphericalangle = 2 \cdot MDE\sphericalangle = 135°$, másrészt $CED\sphericalangle = 135°$. A CEF egyenlő szárú háromszögből egyrészt $CFE\sphericalangle = 45°$, és így $EFG\sphericalangle = 135°$, másrészt $CEF\sphericalangle = 90°$, ezért $DEF\sphericalangle = 360° - DEC\sphericalangle - CEF\sphericalangle = 135°$.

GE az ACM háromszög középvonala, így párhuzamos AM-mel, ezért $FGE\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 22{,}5°$, és így az EFG háromszögből $FEG\sphericalangle = 22{,}5°$, ez a háromszög tehát egyenlő szárú, $FG = FE$.

GH ugyancsak középvonala az ACM háromszögnek, párhuzamos CM-mel. Ezért egyrészt $AGH\sphericalangle = ACK\sphericalangle = 45°$ és így $FGH\sphericalangle = 135°$, másrészt $EGHM$ paralelogramma, $GH = EM = ED$.

A kitűzött egyenlőségek fennállását beláttuk, a bizonyítást befejeztük.

Huhn Ágnes (Szeged, Tömörkény I. lg. I. o. t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $DFHK$ és $EGJL$ egybevágó négyzetek, körülírt körük közös, és a kör középpontja körüli 45°-os forgatással egymásba átvihetők. Ebből már következik, hogy $DEFGHJKL$ körbeírt nyolcszög, és minden oldalához 45°-os középponti szög tartozik, tehát a nyolcszög szabályos.

Az AFM és BFC derékszögű háromszögek egybevágók, mert oldalaik páronként merőlegesek, és így szögeik egyenlők, továbbá FM és FC befogóik egyenlők, mert FMC derékszögű, egyenlő szárú háromszög. A két háromszög F körüli 90°-os forgatással egymásba megy át, eközben H és D, az átfogók felezőpontjai, egymásba mennek át, tehát $FH = FD$, és $DFH\sphericalangle = 90°$. Eszerint DFH egyenlő szárú derékszögű háromszög, és a szimmetria miatt $DFHK$ négyzet. Oldalának hossza $DF = DC = BC/2$, mert F a BC szakasz fölötti Thalész-körön van.

Az $EGJL$ négyszög egymás utáni oldalai középvonalak az AMC, BCA, AMB, ill. BCM háromszögben, ezért rendre egyenlők az AM, BC, AM, BC szakasz felével, azaz egymással is, mert a fenti egybevágóság miatt $AM = BC$.

Másrészt rendre párhuzamosak a felsorolt szakaszokkal, tehát egymás utáni páronként merőlegesek egymásra, mert $AM \perp BC$. Így $EGJL$ valóban négyzet.

Az $EGJL$ négyzet köré írt kör átmegy F-en és K-n, mert F-ből a GL átmérő, K-ból az EJ átmérő derékszögben látszik. FK hossza a két négyzet egybevágósága miatt egyenlő a kör átmérőjével, így FK körünknek is átmérője, mert egy körben csak átellenes pontok vannak egymástól átmérőnyi távolságban. Így körünk a $DFHK$ négyzetnek is körülírt köre. Végül a DH átló párhuzamos az EG oldallal, tehát a két négyzet egymáshoz képest valóban 45°-kal van elfordulva.

Török László (Pannonhalma, Benedek-rendi g. II. o. t.)