Legyen a szóban forgó átló hossza x (méter), a téglalap másik oldala z, így az egyenlőszárú derékszögű háromszög befogója $x/\sqrt{2}$, az ötszög kerülete

$$2z + x + 2\frac{x}{\sqrt{2}} = 255{,}3 = k.$$

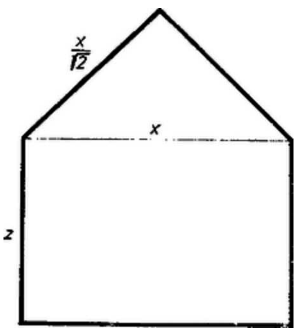
Ebből

$$z = \frac{k - (1+\sqrt{2})x}{2},$$

és az ötszög területe

$$y = xz + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}\big[2kx - (1+2\sqrt{2})x^2\big]. \tag{1}$$

Innen $x = 66$-tal $y = 4255{,}74\ \mathrm{m}^2$, $x = 67$-tel $y = 4256{,}10\ \mathrm{m}^2$, tehát az átló hosszát 67 m-nek véve a körülhatárolt terület nagyobb, az eltérés azonban kevesebb $0{,}4\ \mathrm{m}^2$-nél. ($\sqrt{2} \approx 1{,}414213$-ot véve, mert 6 jegy kell).



Még jobb javaslatot úgy találhatunk, ha megkeressük azt az x-et, mely mellett y értéke maximális. (1) írható $y = bx - ax^2$ alakban, ahol b és a pozitívok. Teljes négyzetté kiegészítéssel

$$y = -a\left(x^2 - \frac{b}{a}x\right) = -a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] = \frac{b^2}{4a} - a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Itt a második tag negatív vagy 0, ezért y maximális értéke $b^2/4a$, és ezt akkor éri el, ha $x = b/2a$. – Mármost

$$b = \frac{k}{2} \quad \text{és} \quad a = \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \quad \text{mellett} \quad x = \frac{k}{2\sqrt{2}+1} = \frac{k(2\sqrt{2}-1)}{7} \approx 66{,}69\ \mathrm{m},$$

és ekkor a terület

$$\frac{b^2}{4a} = \frac{k^2(2\sqrt{2}-1)}{28} = \frac{k}{4}\cdot x \approx 4256{,}19\ \mathrm{m}^2,$$

ami nem egészen $0{,}1\ \mathrm{m}^2$-rel több az $x = 67$ m-es átlóval adódó területnél.

Domokos Zsuzsanna (Makó, József A. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A legnagyobb y-t adó x-et a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján is megkereshetjük. Átalakításokkal

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{a}\cdot x - x^2 = x\left(\frac{b}{a} - x\right).$$

Eszerint y/a négyzetgyöke mértani közép a jobb oldali két tényező között, amelyek összege viszont – és így számtani közepük is – állandó. Ennélfogva a szorzat és vele az idom területe is

$$x = \frac{b}{a} - x, \qquad x = \frac{b}{2a}$$

esetén maximális, ti. amikor a két tényező egyenlő, és ekkor egyenlő a számtani közép négyzetével.

Mátrai Miklós (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. II. o. t.)

2. A maximális területet adó x mellett z egyenlőnek adódik $x/\sqrt{2}$-vel, vagyis az ötszög 4 oldala egyenlő; a számpéldában $z = 47{,}15$ méter.

3. Számos versenyző differenciálszámítással vélte megoldani a feladatot. Ezeket nem fogadtuk el, mert csak arra jutottak, hogy ha egyáltalán van szélső érték, az csak $x = 66{,}69$ méternél lehet. Ez csak szükséges feltétel, de nem elegendő.