Meg kell keresnünk, hogy az adott mértékszámok közül melyik három a kérdéses háromszög oldala. A háromszög a, b, c oldalai és a hozzájuk tartozó s_a, s_b, s_c súlyvonalak között a következő összefüggések állnak fenn:[1]

$$s_a^2=\frac{-a^2+2b^2+2c^2}{4},\quad s_b^2=\frac{2a^2-b^2+2c^2}{4},\quad s_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}. \tag{1}$$

Felhasználjuk továbbá, hogy az adott mértékszámok mindegyike egész.

Válasszuk a betűzést úgy, hogy s_a és s_b egészek, tehát a négyzetük is egész. Így

$$s_a^2+s_b^2=\frac{a^2+b^2}{4}+c^2$$

egész, tehát a^2+b^2 osztható 4-gyel. Így a is, b is páros, mert egy páros és egy páratlan szám négyzetösszege páratlan volna, két páratlan szám négyzetösszege pedig maradékul 2-t adna 4-gyel osztva, hiszen $(2k+1)^2=4k(k+1)+1$.

a és b páros voltából következik, hogy c^2 is páros, mert az első összefüggést átrendezve:

$$c^2=2\left(\frac{a^2}{4}-2\frac{b^2}{4}+s_a^2\right),$$

és a zárójelben mindegyik tag egész. Láttuk, hogy páratlan szám négyzete páratlan, így c csak úgy lehet egész, ha páros. Eszerint az adott mértékszámok közül csak 16, 18 és 22 lehetnek az oldalak.

Mármost $a=22$, $b=18$, $c=16$-tal $s_a=13$, $s_b=17$, ezek az adatok között szerepelnek, így s_c a keresett: $s_c=\sqrt{340}\approx 18{,}44$ egység.

Krassai Éva (Székesfehérvár, Teleki B. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Tetszetős volna a megoldást így fejezni be: „Az (1) kifejezések összege így alakítható:

$$s_a^2+s_b^2+s_c^2=3\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]=3(64+81+121)=798.$$

Az ismert súlyvonalak négyzetösszege 458, tehát a harmadik súlyvonal négyzete 340."

Ez azonban elvileg nem helyes. A háromszög meghatározására 5 adatunk volt, ha szerepüket nem pontosan ismertük is. Ellenőriznünk kellett, hogy a 3 oldal nyert kiválasztása megegyezésben van-e a további 2 adattal.

2. Kissé más úton is kiválaszthatók az oldalak mértékszámai. Mindegyik súlyvonal kisebb, mint a vele egy csúcsból kiinduló oldalak közül a nagyobbik, mert a súlyvonallal kettévágott háromszögnek a mondott nagyobbik oldalt tartalmazó részháromszögében az oldallal szemben tompaszög fekszik, egyenlő szárú háromszögben pedig derékszög. Ezért a legnagyobb adott mértékszám: 22, csak oldal lehet, legyen ez a. Ezzel az (1) kifejezésekből

$$s_a^2=-121+\frac{b^2+c^2}{2},\quad s_b^2=242+\frac{2c^2-b^2}{4},\quad s_c^2=242+\frac{2b^2-c^2}{4},$$

és közülük legalább kettő egész. Ha b páratlan, akkor s_b^2 nem egész, ezért s_a^2 és s_c^2 egészek. Az első most csak páratlan c-vel egész, így viszont s_c^2 nem egész. Eszerint b nem lehet páratlan, és ugyanígy c sem.

Mátrai Miklós (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. II. o. t.)

[1] Lásd pl. a 752. gyakorlatot, K. M. L. 25 (1962/11) 150. o.