Az első egyenlet bal oldalának nevezője

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right],$$

a második tényező csak akkor 0, ha $x=y=0$, ugyanígy a második egyenletben az x^4+y^4 nevező is. Ezt az értékpárt kizárjuk, ugyanígy azokat is, amelyekre $x+y=0$. Minthogy

$$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2,$$

célszerű új ismeretlennek bevezetni az

$$(1)\qquad x^2+y^2=u, \qquad xy=v$$

kifejezéseket. Ezekkel egyenleteink némi átalakítás után

$$2u-2v=5, \qquad 8u^2-16v^2=23u.$$

v kiküszöbölésével

$$8u^2-(4u-10)^2-23u=-8u^2+57u-100=0,$$
$$u_1=\frac{25}{8}, \qquad u_2=4, \quad \text{és így}$$
$$v_1=\frac{5}{8}, \qquad v_2=\frac{3}{2}\,.$$

(1) átalakításával mindkét talált u, v értékpárhoz egy ilyen egyenletrendszer tartozik:

$$(x+y)^2=u+2v, \qquad (x-y)^2=u-2v.$$

Véve mindkét egyenlet négyzetgyökét, elsőfokú egyenletrendszert kapunk x, y-ra:

$$x+y=\sqrt{u+2v}, \qquad x-y=\sqrt{u-2v}, \qquad \text{amiből}$$
$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u+2v}+\sqrt{u-2v}\right), \qquad y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u+2v}-\sqrt{u-2v}\right).$$

Tekintettel a négyzetgyökök két értékére, másrészt a szimmetriára, az u_1, v_1 értékpárból

$$x_1=\frac{1}{8}\left(\sqrt{70}+\sqrt{30}\right), \qquad y_1=\frac{1}{8}\left(\sqrt{70}-\sqrt{30}\right),$$
$$x_2=y_1,\ y_2=x_1; \qquad x_3=-x_1,\ y_3=-y_1; \qquad x_4=-y_1,\ y_4=-x_1,$$

és hasonlóan u_2, v_2-ből:

$$x_5=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+1\right), \quad y_5=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}-1\right);$$
$$x_6=y_5,\ y_6=x_5; \qquad x_7=-x_5,\ y_7=-y_5; \qquad x_8=-y_5,\ y_8=-x_5.$$

Egyik értékpárra sem áll fenn $x+y=0$, így mind megoldása az egyenletnek.

Pagony Mária (Budapest, Berzsenyi D. lg. II. o. t.)