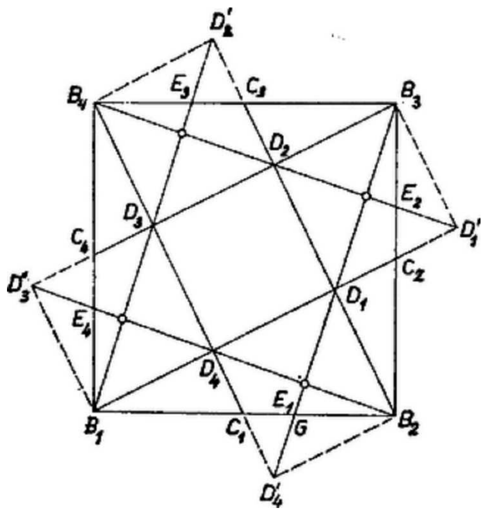
Elegendő azt megmutatni, hogy a B_2D_4, B_3D_1, B_4D_2, B_1D_3 egyenesek egyrészt a feladat 2. állításának eleget tevő négyzetet határoznak meg, másrészt a B négyzet átmetszett oldalát annak harmadoló pontjában metszik. A 2. állításból ugyanis következik az 1., a harmadolásból pedig, hogy a felsorolt egyenesek egybeesnek a B_2E_4, B_3E_1, B_4E_2, B_1E_3 egyenesekkel, így a keletkezett négyzet pedig a feladatban szereplő F négyzettel.

Tükrözzük a $B_1C_1D_4$, $B_2C_2D_1$, $B_3C_3D_2$, $B_4C_4D_3$ háromszögeket C csúcsukra, a D csúcsok tükörképét jelöljük D_i'-vel (i=1, 2, 3, 4). Így a D négyzettel egybevágó négyzetek keletkeznek, ugyanis pl. a $B_2D_1D_4D_4'$ négyszög D_1, D_4, D_4' csúcsainál levő szöge derékszög, a B_2D_4' oldal egyenlő C_1-re vonatkozó tükörképével, B_1D_4-gyel, ez pedig B_2D_1-gyel egyenlő, mert a B négyzet középpontja körüli 90°-os elforgatással átvihető bele; ez a négyszög tehát valóban négyzet; végül egybevágó a D-négyzettel, mert egyik oldaluk közös. A többi négyszög ebből B középpontja körüli 90°-os elforgatással keletkezik; tehát mind vele egybevágó négyzet.



A B_3D_1, B_4D_2, B_1D_3, B_2D_4 egyenes rendre azonos a B_3D_4', B_4D_1', B_1D_2', B_2D_3' egyenessel, mert mindegyik két–két négyzet egy egyenesbe eső átlóiból tevődik össze. Metszéspontjaik a D négyzettel szomszédos kis négyzetek középpontjai. Ezek egy N négyzetet határoznak meg, mert a B négyzet középpontja körüli 90°-os elforgatás egymásba viszi át őket. Ennek az N négyzetnek az oldalait a D_i pontok felezik, mert a D_i pontoknak két szomszédos csúcstól való távolsága egy–egy kis négyzet átlójának a fele, és így egyenlő. Az N négyzet D-n túlnyúló négy része egy–egy kis négyzet negyede, így együttes területük D területével egyenlő, tehát N területe D területének kétszerese.

Azt kell még megmutatnunk, hogy az N négyzet oldalegyenesei B oldalait azok harmadoló pontjaiban metszik. Elég ezt pl. a B_3D_i' egyenesre bizonyítani. Messe ez a B_1B_2 oldalt G-ben. Ekkor $B_1GD_1\triangle \sim B_2GD_4'\triangle$, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak (ill. egy egyenesbe esnek). Mivel még $B_1D_1 = B_1D_4 + D_4D_1 = 2D_4D_1 = 2B_2D_4'$, azért ugyanez a többi oldalpárok aránya is, tehát $B_1G = 2B_2G$. A G pont tehát azonos E_1-gyel, így az N négyzet az F négyzettel, és – mint láttuk – teljesíti az arra kimondott állításokat. Ezt akartuk bizonyítani.

Fejes Tóth Gábor (Budapest, Rákóczi F. g.)