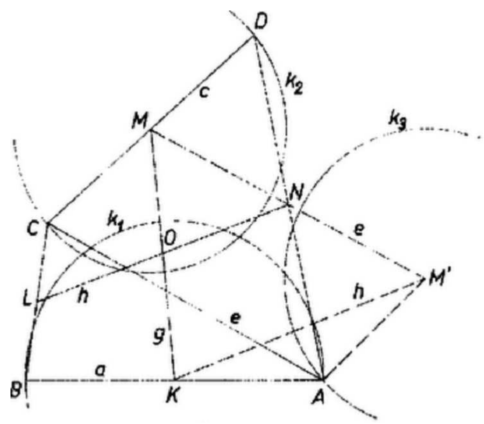
I. megoldás. Legyen a keresett $ABCD$ négyszögben az AB, BC, CD, DA oldal felezőpontja rendre K, L, M, N és $AB = a$, $CD = c$, $AC = e$, $KM = g$, $LN = h$, ahol a, c, e, g, h rendre az adott szakaszok. – Ismeretes egyrészt, hogy a $KLMN$ négyszög paralelogramma; középpontját (KM és LN metszéspontját) jelöljük O-val. Másrészt MN az ACD háromszög középvonala, tehát fele akkora, mint az AC átló. – Az A csúcs egyrészt a K körül $a/2$ sugárral írt k_1 körön van, másrészt – mint D-nek N-re vett tükörképe – D mértani helyének, az M körül $c/2$ sugárral írt k_2 körnek N-re vett k_3 tükörképén. k_3 középpontját M'-vel jelölve $MM' = 2MN = CA = e$, és NO a KMM' háromszög középvonala, tehát $KM' = 2NO = NL = h$.

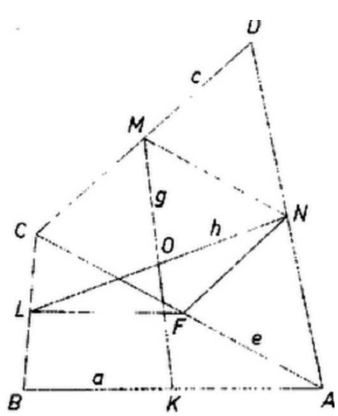


Ezek szerint a szerkesztés a következőképpen végezhető: az e, g, h szakaszokból $KM'M$ háromszöget szerkesztünk úgy, hogy $M'M = e$, $MK = g$, $KM' = h$; az MM' oldal felezőpontja legyen N. A K körül $a/2$ és M' körül $c/2$ sugárral írt körök metszéspontja A, ennek tükörképe K-ra és N-re B, ill. D, végül D tükörképe M-re C.

Az $ABCD$ négyszög megfelel a feladat követelményeinek. Ugyanis a szerkesztés folytán $AB = a$. CM az AM' szakasz kétszeri tükrözésével keletkezett, tehát egyenlő és egyirányúan párhuzamos AM'-vel, ezért az $AM'MC$ négyszög paralelogramma, és egyrészt $AC = MM' = e$, másrészt $CD = 2CM = 2AM' = c$. Ekkor K, N, M a $BADC$ négyszög három egymás utáni oldalának felezőpontja, és $KM = g$. Messe végül a K-n át MN-nel húzott párhuzamos BC-t L-ben. Ez felezi BC-t, mert KL az ABC háromszög AC-vel párhuzamos középvonala. Továbbá $KL = AC/2 = NM$, a $KLMN$ négyszög paralelogramma, KM és LN átlói felezik egymást egy O pontban, ezért egyrészt $NL = 2NO$, másrészt NO a $KM'M$ háromszög középvonala, $KM' = 2NO$, tehát $NL = KM' = h$.

A $KM'M$ háromszög és N egyértelműen létrejön, ha az e, g, h szakaszok eleget tesznek a háromszög-egyenlőtlenségnek: $|g - h| < e < g + h$ –, egyenlőség nem állhat, mert egy egyenesen fekvő K, N, M felezőpont–hármasra vezetne. A létrejön, ha a h, $a/2$, $c/2$ szakaszokból háromszög szerkeszthető, itt elfajulást is megengedhetünk, a megoldások száma 2, ill. 1, feltéve, hogy a 2 metszéspont egyike nem esik MM'-re, mert így A, D, C egy egyenesben adódik. 1 megoldás esetén $ABCD$ trapéznak adódik.

Boldizsár Ferenc (Kaposvár, Táncsics M. g. II. o. t.)



II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használva legyen az AC átló felezőpontja F. Így LF és NF az ACB, ill. ACD háromszög középvonala, $LF = a/2$, $NF = c/2$.

Megszerkesztjük az $e/2$, $g/2$, $h/2$ oldalakból az I. megoldás MNO háromszögét, M és N tükörképe O-ra K, ill. L. Az $LN = h$ oldal fölé megszerkesztjük az LNF háromszöget. Az FMN háromszöget háromféleképpen kiegészítve paralelogrammává adódnak az A, C, D csúcsok, B pedig a $KFLB$ paralelogramma negyedik csúcsa.

A szerkeszthetőség feltételei lényegében azonosak az I. megoldásban találtakkal. Az olvasóra bízzuk annak bizonyítását, hogy az $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek.

Lux Judit (Budapest, Móricz Zs. g. I. o. t.)