

A megadott (0 és 1 közé eső) számokat

$$(1) \quad \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}}$$

alakú számokkal akarjuk megközelíteni, ahol az a_i -k természetes számok; így az utánuk következő törték 1-nél kisebbek.

a) A $\sqrt{2} - 1$ szám esetében az első nevezőben szereplő egésznek eszerint azt a legnagyobb egész számot, a nevező ún. *egész részét* kell választani, amely még nem nagyobb a szám reciprokánál, majd a kettő különbségével járni el hasonló módon:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1, \quad 2 < \sqrt{2} + 1 < 3.$$

Így az első közelítő tört $1/2$, és

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}.$$

A nevezőben ismét $\sqrt{2} - 1$ lépett fel maradéknak, így a 2-es szám fog vég nélkül ismétlődni:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 1 &= \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}} = \\ &= \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}} = \dots \end{aligned}$$

Világos, hogy az eljárás semelyik lépésnél sem fejeződik be. Ez igaz különben minden irracionális számra, hiszen egy (1) alakú szám közöséges törtté alakítható, tehát racionális szám, nem lehet egyenlő egy irracionális számmal.

A $c = \sqrt{2} - 1$ szám első négy közelítő törtje

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}, & c_2 &= \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}, \\ c_3 &= \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2+c_2} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}, \\ c_4 &= \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2+c_3} = \frac{1}{2+\frac{5}{12}} = \frac{12}{29}. \end{aligned}$$

Tizedes alakban $c_1 = 0,5$, $c_2 = 0,4$, $c_3 = 0,4166\dots$, $c_4 = 0,4137\dots$, továbbá $c = 0,4142\dots$, ezek szerint

$$c_2 < c_4 < c < c_3 < c_1,$$

vagyis a közelítő törték váltakozva felülről és alulról közelítik c -t, egyre kisebb eltéréssel:

$$c_1 - c < 0,09, \quad c - c_2 < 0,02, \quad c_3 - c < 0,003, \quad c - c_4 < 0,0006.$$

Célszerűbb azonban a közöséges tört alakot használni a becsléshez. A számláló gyöktelenítésével c_4 -nek c -től való eltérése

$$c - c_4 = \sqrt{2} - 1 - \frac{12}{29} = \frac{29\sqrt{2} - 41}{29} = \frac{1}{29(29\sqrt{2} + 41)},$$

pozitív, tehát

$$c_4 < c, \quad \frac{12}{29} < \sqrt{2} - 1.$$

Ha ennek alapján az eltérés

$$\frac{1}{29[29(\sqrt{2}-1)+70]}$$

alakjában $29(\sqrt{2}-1)$ -et a kisebb 12-vel pótoljuk, kisebb nevezőt veszünk, az eltérésnél nagyobb számot kapunk, más szóval az eltérésnek egy felső korlátját, amely racionális szám, könnyebben áttekinthető. A nevező tényezőinek további alkalmas csökkentésével kerek számot is adhatunk felső korlátnak:

$$c - c_4 < \frac{1}{29(12+70)} < \frac{1}{25 \cdot 80} = \frac{1}{2000} = 0,0005.$$

b) Hasonlóan a

$$\sqrt{3}-1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

átalakításban $1 < \sqrt{3} < 2$ alapján a nevező egész része 1, és így

$$\sqrt{3}-1 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

Az átalakítandó számot d -vel jelölve

$$d = \frac{1}{1 + \frac{d}{2}}$$

Írjuk a jobb oldali nevezőben fellépő d helyére a vele egyenlő jobb oldalt és ismételjük ezt, míg a kifejtésben négy törtvonalunk lesz:

$$d = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+d}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+d}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+d}}}$$

Látjuk, hogy az egymás utáni nevezők első tagja váltakozva 1 és 2; másrészt az eljárás ugyanazért nem fejeződik be, mint az a) esetben.

Az első négy közelítő tört:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad d_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+d_1}} = \frac{3}{4},$$

$$d_4 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+d_2}} = \frac{8}{11}.$$

d -nek d_4 -től való eltérése

$$d - d_4 = \sqrt{3} - 1 - \frac{8}{11} = \frac{11\sqrt{3} - 19}{11} = \frac{2}{11(11\sqrt{3} + 19)} =$$

$$= \frac{2}{11[11(\sqrt{3}-1) + 30]}$$

pozitív, ezért

$$d = \sqrt{3} - 1 > \frac{8}{11} = d_4, \quad 11(\sqrt{3}-1) > 8, \quad \text{és ismét}$$

$$d - d_4 < \frac{2}{11(8+30)} = \frac{1}{209} < \frac{1}{200} = 0,005.$$

Valóban, a tizedes alakú $d = 0,7320\dots$ és $d_4 = 0,7272\dots$ értékekből is $d - d_4 < 0,7321 - 0,7272 = 0,0049$.