I. megoldás. A feladatnak nincs megoldása, mert A egyik számjeggyel sem lehet egyenlő. Nem lehet $A<4$, mert A^2 kétjegyű, sem $A=5$, sem $A=6$, mert ezek négyzete A jegyre végződik, holott A^2 egyes helyi értékű jegye az A-tól különböző E. Nem lehet $A=7$, mert így A^2-ből $E=9$, viszont nincs olyan C^2, melynek tízes helyi értékű jegye 9. Hasonlóan az $A=4$ kiindulásból $E=6$, így $C=8$ és $F=4$, holott $F\neq A$. Végül A-t 8-nak vagy 9-nek véve A, D, E, F és C csupa különböző jegynek adódik:

A	D	E	F	C
8	6	4	9	7
9	8	1	6	4

viszont a $\overline{DEEFEF}$ szám egyik esetben sem négyzetszám:

$$644\,949=9\cdot 71\,661=3^3\cdot 23\,887,$$

és itt a második tényező számjegyeinek összege 28, a tényező nem osztható 3-mal; ill.

$$811\,616=3\cdot 270\,538+2,$$

holott négyzetszámot 3-mal osztva a maradék nem lehet 2, mert

$$(3k)^2=3\cdot 3k^2 \quad \text{és} \quad (3k\pm 1)^2=3k(3k\pm 2)+1.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Székely Gábor (Budapest, Madách I. g. II. o. t.)

II. megoldás. Az adatok szerint egyrészt

$$\overline{ABC^2}=\overline{DEEFEF}=\overline{DE}\cdot 10^4+\overline{EF}\cdot 10^2+\overline{EF}=10^4A^2+101\cdot C^2,$$

másrészt

$$\begin{gathered}\overline{ABC^2}=\left(10^2A+10B+C\right)^2=\\ =10^4A^2+2\cdot 10^3A\cdot B+10^2B^2+2\cdot 10^2A\cdot C+20B\cdot C+C^2.\end{gathered}$$

A két kifejezés egyenlőségéből rendezés és egyszerűsítés után

$$B\cdot C=5(C^2-B^2-20A\cdot B-2A\cdot C). \tag{1}$$

Eszerint a $B\cdot C$ szorzat osztható 5-tel, tehát tényezőinek legalább az egyike osztható 5-tel, vagyis egyenlő 5-tel, vagy 0-val.

Nem lehet $C=0$, mert C^2 kétjegyű, sem $C=5$, mert ennek négyzete 5-re végződik, holott C^2 egyes helyi értékű jegye a C-től különböző F. Nem lehet $B=5$ sem, mert így a zárójelben negatív szám áll, hiszen $C^2<100$, viszont $20A\cdot B=100A\geq 100$, a bal oldalon pedig $B\cdot C$ nem lehet negatív. Az egyetlen maradó $B=0$ lehetőség mellett (1)-ből $C^2-2AC=C(C-2A)=0$, ezért $2A=C<10$, $A<5$. Másrészt $A\geq 4$, mert A^2 kétjegyű. Ezeket egybevetve $A=4$, $C=8$, $D=1$, $E=6$, $F=4=A$, ami ki van zárva. Így a feladatnak nincs megoldása.

Herényi István (Budapest, I. István g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan haladhatunk az ABC szám négyzetét a lépcsőző eljárással képezve:

$$\begin{array}{c|cccccc}
A^2 & D & E & . & . & . & . \\
2\cdot A\cdot B & x & x & x & . & . & . \\
B^2 & & & x & x & . & . \\
2\cdot\overline{AB}\cdot C & & x & x & x & x & . \\
C^2 & & & & & E & F \\
\hline
 & D & E & E & F & E & F
\end{array}$$

(az x-ek helyén jegyek állnak, a pontok helyén biztosan zérusok). Ugyanis az első két oszlopból $2AB<10$, a tízes helyi értékű oszlopból pedig $2\cdot\overline{AB}\cdot C$ osztható 10-zel.

Hirka Ferenc (Budapest, XVII., Szabadság sugárúti ált. isk. VIII. o. t.)

2. A II. megoldás $C=2A$ összefüggése (1) átalakításából így adódik:

$$B(100A+5B+C)=5C(C-2A).$$

A bal oldali zárójel értéke $A\geq 4$ miatt több mint 400. A jobb oldalon $C-2A$ nem negatív, mert a bal oldal nem az. Így $C-2A$ értéke legfeljebb 1, a jobb oldalé legfeljebb 45, tehát az egyenlőség csak $B=0$-val állhat fenn. Így $C\neq 0$, ezért a zárójelben $C=2A$.

Horányi János (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

3. Sok dolgozat a $408^2=166\,464$, $4^2=16$, $8^2=64$ megoldást adta meg, ezeket 3 pontra értékelte a szerkesztőség.