A kéttagúak negyedik hatványát kétszeri négyzetreemeléssel polinommá alakíthatjuk:

$$\begin{aligned}(n-1)^4 &= \left(n^2-2n+1\right)^2 = n^4-4n^3+6n^2-4n+1,\\ (n+1)^4 &= \phantom{\left(n^2-2n+1\right)^2 = {}} n^4+4n^3+6n^2+4n+1.\end{aligned}$$

Ezek alapján az összeg $S=3n^4+12n^2+2$. A 10-zel növelt összeg így írható:

$$S+10=3(n^4+4n^2+4)=3\left(n^2+2\right)^2.$$

Ez valóban négyzetszám 3-szorosa, mert $n^2+2$ egész szám.

Akkor lesz csak a talált szám a négyzetszámok 3-szorosai közül az első $S$-nél nagyobb, ha a megelőző: $3\left(n^2+1\right)^2$ még nem nagyobb S-nél, tehát ha

$$3n^4+12n^2+2\geq 3\left(n^2+1\right)^2=3n^4+6n^2+3,$$

$$6n^2\geq 1. \tag{1}$$

Ez teljesül minden a 0-tól különböző egész számra, de $n=0$-ra nem. Emiatt az egyetlen eset miatt az illető állítása – a kimondott alakban – nem igaz.

Igazzá válik viszont, ha az „egész” megjelölés helyett a „0-tól különböző egész” megjelölést használjuk. Vagy pl. úgy is, ha „egész szám” helyett „természetes szám”-ot mondunk.

*Hoffer Anna* (Budapest, Hámán K. lg. II. o. t.)

**II. megoldás.** Adjunk a kérdéses $S=3n^4+12n^2+2$ összeghez 10 helyett egy $t$ természetes számot és keressük $t$-nek azt a legkisebb értékét, amely mellett az $S+t$ összeg 3-ad része:

$$n^4+4n^2+\frac{2+t}{3}$$

négyzetszám. Mindjárt látjuk, hogy $n=0$ mellett megfelel $t=1$. Ez kisebb 10-nél, tehát az állítás nem igaz.

*Megjegyzés.* A hiányos megoldások nem tettek különbséget „egész szám” és „természetes szám” között. Előfordult az is, hagy a versenyző felvetette a fenti kulcskérdést, azonban (1)-re kijelentette, hogy minden egész számra érvényes.