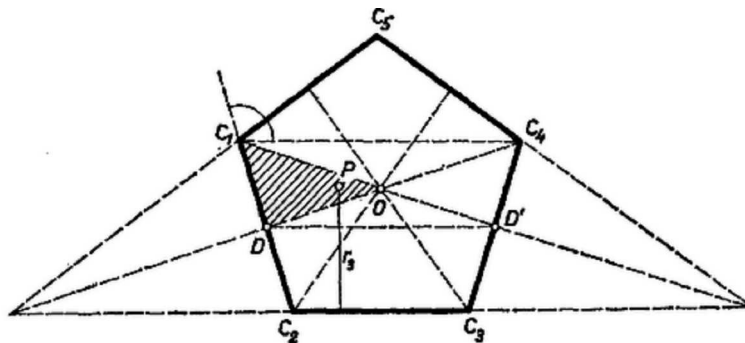


Legyen a $C_1C_2C_3C_4C_5 = S$ szabályos ötszög középpontja O . Meghúzva a szimmetriatengelyeit, S feloszlik 10 derékszögű háromszögre. Közülük bármelyik kettő egymásba átvihető vagy egy O körüli forgatással, melynek szöge a 72° -nak egy egész számú többszöröse, vagy valamelyik szimmetriatengelyen való tükrözéssel. Ezért elég egyelőre az OC_1D háromszög belsejében vagy a kerületén levő P pontokra szorítkoznunk, ahol D a C_4O tengely és a C_1C_2 oldal metszéspontja, egyben ezen oldal felezőpontja.



Megmutatjuk, hogy ekkor P -re nézve a C_2C_3 oldaltól mért távolság mindig megadja r_3 -at, vagyis van két másik a távolságok között, amelyek legfeljebb akkora, és kettő, amelyek legalább akkora, mint a C_2C_3 oldaltól mért távolság.

A P pont távolsága C_2C_3 -tól legalább akkora, mint C_1C_2 -től és C_5C_1 -től, ugyanis a $C_1C_2C_3$ szög C_2O szögfelezőjének arra az oldalára esik, mint a C_1C_2 szár, vagy a szögfelezőre (ha $P = O$), másrészt a C_2C_3 és C_1C_5 oldalak közti szög C_4D szögfelezőjének arra az oldalára, mint a C_1C_5 oldal, vagy a szögfelezőre.

Másrészt P távolsága C_2C_3 -tól nem nagyobb, mint a C_3C_4 és C_4C_5 oldaltól mért távolsága, mert a $C_2C_3C_4$ szög C_3O szögfelezőjének a C_2C_3 szár felőli oldalára esik, vagy a felezőre; továbbá a C_2C_3 és C_5C_4 oldalak szögét felező C_1O egyenesnek is arra az oldalára, mint a C_2C_3 szár, vagy a felezőre.

Azt kell még megvizsgálnunk, a C_1DO háromszög melyik pontja van legmesszebb és melyik legközelebb a C_2C_3 oldalhoz. C_1 -en és D -n át párhuzamost húzva C_2C_3 -mal, az előbbi átmegy C_4 -en, az utóbbi a C_3C_4 oldal D' felezőpontján. A két egyenes közti sáv tartalmazza az O pontot, s így a C_1DO háromszöget, mert egyrészt

$$OC_1C_2 \sphericalangle = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ < C_4C_1C_2 \sphericalangle = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ,$$

másrészt

$$D'DC_2 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ < ODC_2 = 90^\circ.$$

Eszerint a háromszög C_1 csúcsa van legmesszebb és D csúcsa legközelebb C_2C_3 -hoz, az utóbbi távolsága az előbbinek fele.

Most már P mindazon helyzetei, amelyekre r_3 a lehető legnagyobb: S összes csúcsai, azok pedig, amelyekre r_3 a lehető legkisebb: S összes oldalfelező pontjai.

Szabó Mihály (Makó, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A távolságokat az oldalak *egyeneseitől* mértük. – Egy pontnak egy *szakasztól* mért távolságán a szakasz hozzá legközelebbi pontjától mért távolságát értjük. Ha a pontnak a szakasz egyenesére való vetülete hozzátartozik a szakaszhoz, akkor a szakasztól való távolsága egyenlő az egyenestől való távolságával. Ha nem, akkor a szakasznak ahhoz a végpontjához van legközelebb a pont, amelyik közelebb van a vetületéhez. Könnyű belátni, hogy megállapításaink akkor is érvényesek, ha az r_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) távolságokat S oldalszakaszaitól mérjük.