I. megoldás. Jelöljük a kérdéses összeget S-sel.

Ha a kitöltésben nincs -1-es szám, akkor a szorzat értéke minden sorban és oszlopban $+1$, így $S=50$. Minden más esetben cseréljünk ki egy -1-es bejegyzést $+1$-re és vizsgáljuk meg ennek kihatását S megváltozására. A megváltoztatott bejegyzés sorában a szorzat előjele megváltozik, így a szorzat értéke vagy $+1$-ről -1-re, vagy -1-ről $+1$-re változik, tehát vagy 2-vel növekszik, vagy 2-vel csökken. Ugyanez érvényes a megváltoztatott bejegyzés oszlopa számainak szorzatára. Ha mindkét szorzat növekszik, vagy ha mindkettő csökken, akkor S változása 4 egység. Ha pedig egyik szorzat nőtt, a másik csökkent, akkor az új S érték a változtatás ellenére ugyanannyi mint az eredeti. Ezzel a sorbeli és oszlopbeli változási lehetőségek minden párját figyelembe vettük.

Táblázatunk -1-es bejegyzéseit lépésről lépésre $+1$-re cserélve S értéke – ha egyáltalán változik – mindig 4-gyel változik és a -1-esek elfogytával, mint láttuk, 50 lesz. Így S minden lehetséges értéke 50-től 4 valamilyen többszörösével különbözik, ezért 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint 50, vagyis 2-t, nem lehet tehát 0.

Bély Miklós (Győr, Révai M. g. I. o. t.)

II. megoldás. Az állítás érvényes minden olyan hasonlóan kitöltött négyzetes táblázatra, melyben a sorok és oszlopok száma $2k+1$, páratlan szám. Tegyük fel, hogy van e táblázatnak olyan csupa $+1$ és -1 bejegyzésekből álló kitöltése, amelyben a sorok menti és az oszlopok menti szorzatok összege 0, és jelöljük egy ilyen kitöltésben a $+1$-es szorzatot adó sorok számát x-szel, a -1-et adókét y-nal. Ekkor a $+1$-es szorzatot adó oszlopok u száma egyenlő y-nal, a -1-et adó oszlopok v száma pedig x-szel, mert u és v-re

$$u+v=x+y=(2k+1),$$
$$u\cdot(+1)+v\cdot(-1)+x\cdot(+1)+y\cdot(-1)=0,$$

és innen $u=y$, $v=x$.

Az x és y számok egyike páros, másika páratlan. Feltehetjük, hogy x páros, mert különben a táblázatnak az egyik átlóra vett tükörképére lesz páros a $+1$-es szorzatot adó sorok száma, ti. $u=y$, ezzel a cserével viszont a kérdéses összeg nem változik meg.

Feltevésünk tarthatatlansága kiadódik abból, ha megmutatjuk, hogy a -1-es bejegyzések számát a sorok szerint megállapítva páratlannak találjuk, az oszlopok szerint pedig párosnak. A $+1$-es szorzatot adó vonalakon (azaz sorokon is, oszlopokon is) a -1-es bejegyzések száma páros, a -1-et adókon páratlan. Így a sorok szerinti számlálásban x, azaz páros számú páros összeadandót és y, azaz páratlan számú páratlan összeadandót összegezünk, az első részletösszeg páros, a második páratlan, a végösszeg páratlan, mint állítottuk. A -1-es bejegyzések oszlopok szerinti összeszámlálásában viszont egyrészt u, azaz páratlan számú páros összeadandót összegezünk, másrészt v, azaz páros számú páratlan összeadandót, mindkét részletösszeg páros, tehát a -1-es bejegyzések száma páros. Ezt akartuk megmutatni.

Nincs tehát a $(2k+1)\times(2k+1)$-es táblázatnak olyan kitöltése az előírások mellett, melyben a szóban forgó összeg 0.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o.t.)

Megjegyzés: A gyakorlat állítása a kitöltési előírás megtartása mellett m sort és n oszlopot tartalmazó téglalap alakú táblázatra is igaz, hacsak az $m+n$ összeg nem osztható 4-gyel. Mindkét megoldás gondolatmenete átvihető ennek az állításnak a bizonyítására is.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)