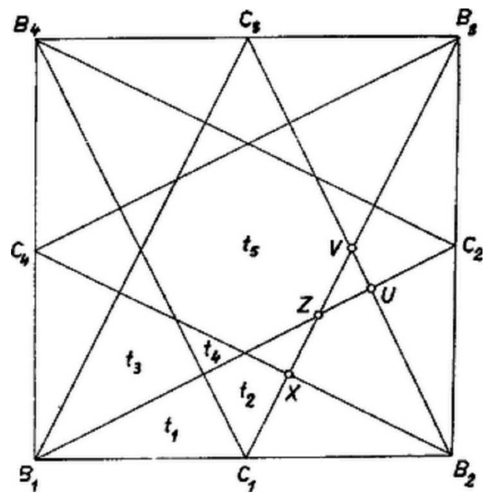
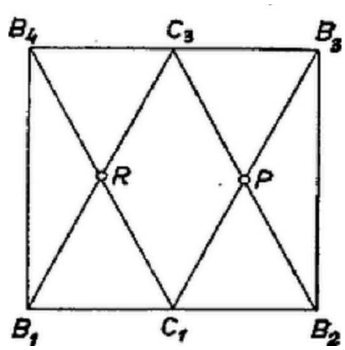
I. megoldás. Az összes vonalakat meghúzva egy egységnyi oldalú $B_1B_2B_3B_4$ négyzetben, 5–féle idom keletkezik: minden oldalon nyugszik 2–2 egybevágó háromszög, ezekhez illeszkedik az oldalközéppontoknál 1–1 kisebb, a négyzetcsúcsoknál 1–1 nagyobb deltoid, a deltoidok további oldalaihoz 8 egybevágó kisebb háromszög csatlakozik, középen pedig egy egyenlő oldalú nyolcszög jön létre. Az ugyanolyan félének mondott idomok valóban egybevágók, mert a négyzetet középpontja körül 90° valamilyen többszörösével elforgatva, ill. valamelyik átlóra vagy középvonalra tükrözve egymásba átvihetők. Jelöljük ezek területét a felsorolás sorrendjében t_1, t_2, t_3, t_4, ill. t_5-tel (1. ábra).



1. ábra



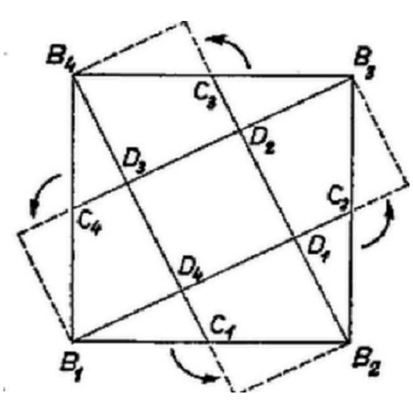
2. ábra

Jelöljük a B_1B_2, B_2B_3, ... oldalak felezőpontját C_1, C_2, C_3, C_4-gyel és tekintsük először csak a C_1 és C_3 pontból induló vonalakat, a keletkező metszéspontok legyenek P és R (2. ábra). Így a négyzetet 1 rombuszra, 4 hegyesszögű és 2 tompaszögű háromszögre bontottuk: az utóbbiak mindegyike nyerhető a rombuszból valamelyik átlójával való szétvágással. Így a rombusz területe 1/4, a háromszögeké 1/8. Felírva, hogy az egyes idomok az 1. ábra milyen idomaiból tevődnek össze, a következő összefüggéseket kapjuk:

(1) $$2t_2 + 4t_4 + t_5 = \frac{1}{4},$$

(2) $$t_1 + t_3 + t_4 = \frac{1}{8},$$

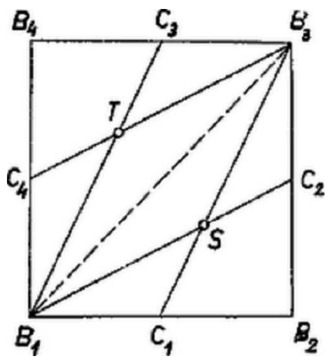
(3) $$2t_1 + t_2 = \frac{1}{8}.$$



3. ábra

Tekintsük most a B_1C_2, B_2C_3, B_3C_4, B_4C_1 egyeneseket. Ezek egy $D_1D_2D_3D_4$ négyzetet, 4 háromszöget és 4 trapézt határoznak meg (3. ábra). Ha a háromszögeket C_i csúcsuk körül ($i = 1, 2, 3, 4$) 180°-kal elforgatjuk, a trapézok a középsővel egybevágó négyzetekké egészülnek ki. Világos ugyanis, hogy a keletkező négyszögek téglalapok, de pl. a $B_2D_1D_4C_1$ trapéz B_2 csúcsához csatlakozó új oldal B_1D_4-gyel egyenlő hosszú, ez pedig 90°-os forgatással B_2D_1-be vihető át, tehát egyenlő vele. A kis négyzetek területe tehát 1/5. A középsőt alkotó részidomokat felírva

$$4t_4 + t_5 = \frac{1}{5}. \tag{4}$$



4. ábra

Tekintsük végül a B_1 és B_3 csúcsból kiinduló osztóvonalakat, metszéspontjaik legyenek S és T (4. ábra). Ezzel a $B_1B_2B_3$ és $B_1B_3B_4$ háromszögek két–két súlyvonalát húztuk meg. Így a B_1SB_3 és B_1TB_3 háromszögek B_1B_3 oldalához tartozó magasságai harmadakkorák, mint a két derékszögű háromszög megfelelő magasságai, tehát a B_1SB_3T rombusz területe 1/3. Felírva az alkotórészidomokat

$$2t_3 + 4t_4 + t_5 = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

Levonva (4)-et (1)-ből és (5)-ből, nyerjük, hogy

$$t_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{40}, \quad t_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}.$$

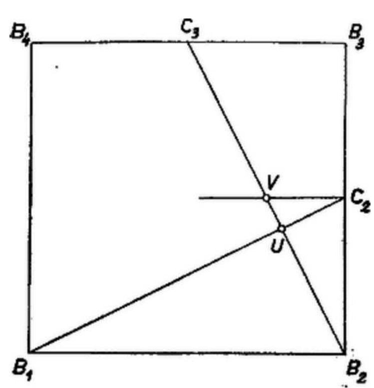
Így (3)-ból, majd (2)-ből

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{40}\right) = \frac{1}{20}, \quad t_4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{20} - \frac{1}{15} = \frac{1}{120}.$$

Végül (4)-ből

$$t_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}.$$

Iváncsy Szabolcs (Miskolc, Bláthy O. vill. t. I. o. t.)



5. ábra

II. megoldás. Húzzuk meg először a B_1C_2 és B_2C_3 szakaszokat, metszéspontjuk legyen U, és a C_2-ből B_1B_2-vel párhuzamosan húzott egyenes messe B_2C_3-at V-ben (5. ábra). Ekkor (az idomokat és területüket ugyanúgy – csúcsaik egymás után írásával – jelölve):

$$B_2B_3C_3 = \frac{1}{4}, \quad B_2C_2V = \frac{1}{4} \cdot B_2B_3C_3 = \frac{1}{16},$$

továbbá, mivel a C_2UV és B_2UC_2 háromszögek hasonlók, és átfogóik $C_2V = 1/4$ (a $B_2B_3C_3$ háromszög középvonala), ill. $B_2C_2 = 1/2$, így az előbbi háromszög területe az utóbbi negyedrésze, tehát a kettőből összetevődő B_2C_2V háromszög ötöde, így

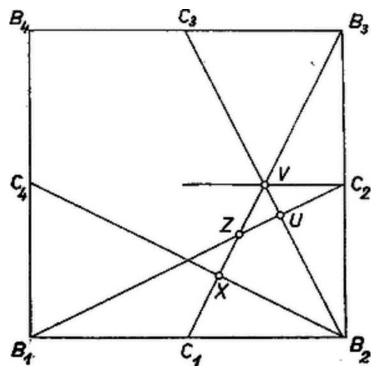
$$C_2UV = \frac{1}{5}B_2C_2V = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{80}, \quad \text{és} \quad B_2UC_2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{20}.$$

Húzzuk most meg a B_2C_4 és B_3C_1 szakaszokat, messe az utóbbi a B_1C_2-t Z-ben (6. ábra). Ez a $B_1B_2B_3$ háromszög súlypontja, s így a B_2B_3 oldaltól $B_1B_2/3 = 1/3$ távolságra van, ennélfogva

$$B_3C_2Z = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \quad \text{és}$$
$$UVZ = B_3C_2Z - B_3C_2V - C_2UV = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} - \frac{1}{80} = \frac{1}{120}.$$

Jelöljük továbbá B_3C_1 és B_2C_4 metszéspontját X-szel, akkor B_2XC_1 és B_2UC_2 egymás tükörképei a B_2B_4 átlóra nézve, így

$$B_2UZX = B_2B_3C_1 - B_3C_2Z - B_2C_2U - B_2C_1X = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - 2\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{15}.$$



6. ábra

Meghúzva most már az összes osztóvonalakat (1. ábra), keletkezik 8 a B_2UC_2-vel egybevágó, tehát $t_1 = 1/20$ területű háromszög, 4 a B_2UZX-szel egybevágó, tehát $t_2 = 1/15$ területű deltoid, 4 további, az oldalközéppontokhoz csatlakozó deltoid, amelyek t_3 területe a C_2UV háromszög kétszerese, tehát $t_3 = 2\,C_2UV = 1/40$, 8 az UVZ-vel egybevágó háromszög, területük $t_4 = 1/120$, végül egy nyolcszög, amelynek területe

$$t_5 = 1 - 8\cdot\frac{1}{20} - 4\cdot\frac{1}{15} - 4\cdot\frac{1}{40} - 8\cdot\frac{1}{120} = \frac{1}{6}.$$

Kelemen Gábor (Sárospatak, Rákóczi F. g. II. o. t.)