A következő szögek egyenlők:

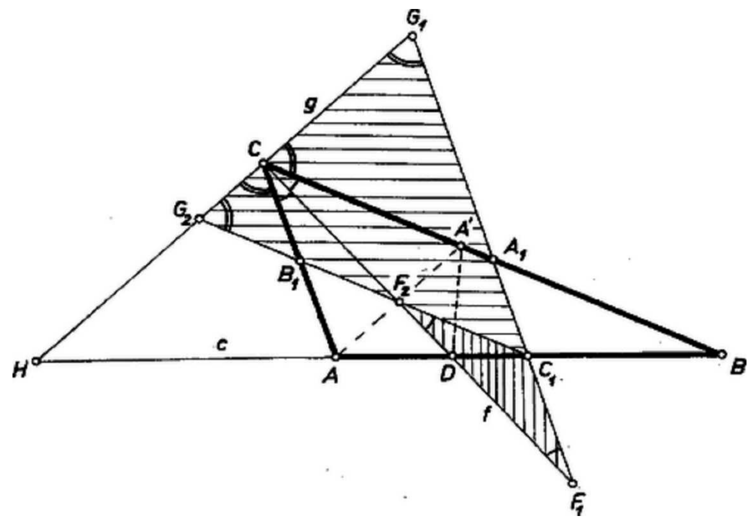
$$C_1F_2F_1\sphericalangle, \qquad BCF_1\sphericalangle, \qquad ACF_2\sphericalangle, \qquad C_1F_1F_2\sphericalangle,$$

mert az ábra szerint a felsorolás első két tagja egyállású szögpárt alkot, utolsó két tagja pedig váltószögpárt, végül a középső két szög az ACB szög felezésével keletkezett. Így $C_1F_2F_1\sphericalangle = C_1F_1F_2\sphericalangle$, tehát $C_1F_2 = C_1F_1$.

Hasonlóan

$$C_1G_2G_1\sphericalangle = BCG_1\sphericalangle = ACG_2\sphericalangle = C_1G_1G_2\sphericalangle,$$

mert a középső két szög az ACB szög felét derékszöggé egészíti ki, a szélső párok pedig egyállású szögek. Ezért $C_1G_2G_1\sphericalangle = C_1G_1G_2\sphericalangle$, és $C_1G_2 = C_1G_1$.



Szerkesztésnél fogva a C_1F_1 egyenes átmegy a BC oldal A_1 felezőpontján, mert az ABC háromszög AC-vel párhuzamos középvonala, ugyanis átmegy C_1-en és párhuzamos AC-vel, C_1F_2 pedig ugyanígy az AC oldal B_1 felezőpontján. Továbbá a fentiekből adódik, hogy a B_1CF_2 és A_1CG_1 háromszögek is egyenlő szárúak, így

$$C_1F_2 = C_1B_1 - B_1F_2 = A_1C - B_1C = \frac{BC - AC}{2},$$
$$C_1G_1 = C_1A_1 + A_1G_1 = B_1C + A_1C = \frac{AC + BC}{2},$$

vagyis a vizsgálandó szárak hossza egyenlő az eredeti háromszög C-ben összefutó oldalainak fél különbségével, ill. fél összegével.

Bodonhelyi Márta (Budapest, Móra F. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A felhasznált szögpárok egyenlősége és C_1F_2 hosszának meghatározása épít a következő, szemléletre és a $BC > AC$ feltevésre alapozott tényekre: *α)* f az AB egyenes AC_1 szakaszát metszi, *β)* az f egyenesen C, F_2, F_1 sorrendben következnek a kijelölt pontok, *γ)* G_1 és G_2 pedig közrefogja C-t g-n. Ezeket beláthatjuk a szemléletre való hivatkozás nélkül is.

α) f-nek az AB egyenessel való D metszéspontja az oldalszakaszra esik, mert f belső szögfelező. Jelöljük A-nak f-re vett tükörképét A'-vel, ez a feltevés szerint a BC szakaszon van. Így az $A'BD$ háromszögben

$$\begin{aligned} BA'D\sphericalangle &= 180^\circ - CA'D\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle = \\ &= ABC\sphericalangle + ACB\sphericalangle > ABC\sphericalangle = DBA'\sphericalangle, \end{aligned}$$

tehát a szemben fekvő oldalakra $BD > A'D = AD$.

β) A B_1C_1 egyenes B_1-ben metszi az ACD háromszög kerületét, tehát még egy pontban kell metszenie. Ez nem lehet az AD oldalon, mert annak meghosszabbítását metszi B_1C_1 (C_1-ben), tehát B_1C_1-nek f-fel való F_2 metszéspontja a CD szakaszon van.

Az ACD háromszög az A_1C_1 egyenesnek teljesen egyik partján fekszik, mert C_1 az AD szakasz D-n túli meghosszabbításán van, AC pedig párhuzamos A_1C_1-gyel. Így a CD egyenest A_1C_1 a CD szakaszon kívül metszi, mégpedig D-n túli meghosszabbításában, mert az AC egyenesnek a D pont s vele együtt f-nek a C-ből D felé haladó félegyenese esik ugyanazon oldalára, mint A_1C_1. Így a C, F_2, D, F_1 pontok ebben a sorrendben következnek az f egyenesen.

γ) A g egyenes az ACB szögtartományon kívül halad, mert e szög 180°-nál kisebb, így G_1 a C_1A_1 szakasz A_1-en túli meghosszabbítására, G_2 pedig C_1B_1-nek B_1-en túli meghosszabbítására esik. F_2 az AC és A_1C_1 egyenesek közt van, mert C és F_1 közt van, így egyszersmind B_1 és C_1 közt, tehát a C_1G_2 szakaszon van. F_1 viszont CD-nek D-n túli meghosszabbításán van, így AB-nek ellenkező oldalán, mint C és mint A_1. Így F_1 az A_1C_1 szakasz C_1-en túli meghosszabbításán van. Eszerint az f egyenes a $C_1G_1G_2$ háromszög C_1G_2 oldalát és a G_1C_1 oldal meghosszabbítását metszi, kell tehát, hogy a harmadik oldalt messe, azzal való C metszéspontja G_1 és G_2 közt legyen.

2. A $C_1G_1 = C_1G_2$ egyenlőséget így is bizonyíthatjuk. A $G_1C_1G_2$ szög f_1 felezője párhuzamos f-fel, mert a szög váltószög–párja $ACB\sphericalangle$-nek, és *váltószögek felezői párhuzamosak*. Így f_1 merőleges g-re. Ha pedig *egy háromszög egy szögfelezője merőleges a szemben levő oldalra, akkor a háromszög egyenlő szárú*. Itt viszont a dőlt betűvel szedett állításokat kellene bizonyítanunk.

3. A vizsgált háromszögek szárainak az AB, BC, CA oldalakkal való kifejezéseit néhány dolgozat a belső és külső szögfelezők $AD : DB = AC : CB = AH : HB$ osztásarányát felhasználva több számítással állította elő.