I. megoldás. Olyan x, y, z, u pozitív egész számot keresünk, amelyekre

$$K=\sqrt{36+14\sqrt6+14\sqrt5+6\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u}: \tag{1}$$

Négyzetre emeléssel

$$36+14\sqrt6+14\sqrt5+6\sqrt{30}=(x+y+z+u)+$$
$$+2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{xu}+\sqrt{yz}+\sqrt{yu}+\sqrt{xu}).$$

A jobb oldal első négytagúja egész, ezért vagy egyenlő 36-tal, vagy kisebb annál, ti. akkor, ha a második zárójel tagjai között is van egész:

$$x+y+z+u\leqq 36.$$

Eszerint x, y, z, u egyike sem lehet több 33-nál, és bármelyik kettőjük összege nem lehet több 34-nél. Ezért a második zárójel egyik tagja sem lehet egyenlő a

$$14\sqrt6=2\sqrt{294},\qquad 14\sqrt5=2\sqrt{245},\qquad 6\sqrt{30}=2\sqrt{270}$$

tagok egyikével sem, más szóval az xy, xz, $\ldots$, zu szorzatok egyíke sem egyenlő a 294, 245, 270 számok valamelyikével. Ugyanis a $294=2\cdot3\cdot7^2$, $245=5\cdot7^2$, $270=2\cdot3^3\cdot5$ számok lehetséges kéttényezős szorzat–előállításai:

$294=1\cdot294=2\cdot147=3\cdot98=6\cdot49=7\cdot42=14\cdot21$,
$245=1\cdot245=5\cdot49=7\cdot35$,
$270=1\cdot270=2\cdot135=3\cdot90=5\cdot54=6\cdot45=9\cdot30=10\cdot27=15\cdot18$.

Ezek közül csak $15\cdot18$-ban kisebb a tényezők összege 34-nél. Mármost az $x=18$, $y=15$ feltevésből $z+u\leqq3$ következik, ebből pedig

$$\text{vagy } z=u=1,\qquad \text{vagy } z=2,\quad u=1.$$

Ámde mindkét további feltevés ellentmondásra vezet; ugyanis az első alesetben $2\sqrt{zu}=2$, és így a racionális rész legalább 37, – a másodikban pedig $2\sqrt{zu}=2\sqrt2$, márpedig a bal oldalon nincs $\sqrt2$-nek egész számú többszöröse, a jobb oldalon viszont minden tag pozitív, a $2\sqrt2$ tag nem eshet ki. Ezek szerint a bal oldal mindegyik gyökös tagja a jobb oldal két gyökös tagjának összegével egyenlő. Ebből az is adódik, hogy $x+y+z+u=36$.

Ha pl. $\sqrt{xy}$ és $\sqrt{xz}$ összevonható volna, akkor ez állna $\sqrt{y}$ és $\sqrt{z}$-re is, így (1) jobb oldala 4-nél kevesebb tagból állna. Ezt a lehetőséget egyelőre figyelmen kívül hagyjuk, feltesszük, hogy az összevonható tagpárokban a gyökjelek alatt nincs azonos betű, tehát pl.

$$2\sqrt{xy}+2\sqrt{zu}=14\sqrt6, \tag{2}$$
$$2\sqrt{xz}+2\sqrt{yu}=14\sqrt5, \tag{3}$$
$$2\sqrt{xu}+2\sqrt{yz}=6\sqrt{30}. \tag{4}$$

(2) és (3), majd (4) és (3) négyzeteinek különbségéből a gyökös tag kiesik. Egyszerűsítéssel, majd szorzattá alakítással

$$xy+zu-xz-yu=49,$$
$$(x-u)(y-z)=49; \tag{5}$$
$$xu+yz-xz-yu=25,$$
$$(x-y)(u-z)=25. \tag{6}$$

Feltehetjük, hogy $x>u$, ekkor (5)-ből $y>z$, és mivel $x-u$ nem lehet 49, azért $x-u=y-z=7$. Innen $x-y=u-z$, tehát (6) szerint közös értékük $+5$, vagy -5. Feltehetjük, hogy $x>y$, így $x-y=5$. E három független egyenlethez hozzávéve $x+y+z+u=36$-ot, adódik: $x=15$, $y=10$, $u=8$, $z=3$.

Ezek pozitív egész számok, megfelelnek a követelményeknek és valóban fennáll

$$\sqrt{36+14\sqrt6+14\sqrt5+6\sqrt{30}}=\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt8+\sqrt3$$

(a két oldal közelítő értéke 11,5957).

Szentai Judit (Budapest, Kanizsay D. lg. II. o. t.)

II. megoldás. Vegyük észre, hogy a gyök alatti K kifejezés szorzattá alakítható:

$$K=6(6+\sqrt{30})+14(\sqrt6+\sqrt5)=6\sqrt6(\sqrt6+\sqrt5)+14(\sqrt6+\sqrt5)=$$
$$=(6\sqrt6+14)(\sqrt6+\sqrt5),$$

így a keresett négyzetgyök egyenlő e két kéttagú számkifejezés négyzetgyökének szorzatával. Alkalmazzuk az elsőre az ismert[1] (és könnyen igazolható)

$$\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A-B}}{2}}$$

azonosságot: $A=216$, $B=196$, $A-B=2^2\cdot 5$, és így

$$\sqrt{6\sqrt{6}+14}=\sqrt{3\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{3\sqrt{6}-\sqrt{5}},$$

ezért, majd az azonosságot újból alkalmazva

$$K=\left(\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{3\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt{23+4\sqrt{30}}+\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{23+\sqrt{529-480}}{2}}+\sqrt{\frac{23-\sqrt{49}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-120}}{2}}+\sqrt{\frac{13-\sqrt{49}}{2}}=\sqrt{15}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{3}.$$

Lehel Csaba (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás. Vegyük segítségül az

$$L=\sqrt{36+14\sqrt{6}-14\sqrt{5}-6\sqrt{30}}$$

számkifejezést. Ezzel

$$(K+L)^2=K^2+L^2+2KL=72+28\sqrt{6}+$$

$$+2\sqrt{\left(36+14\sqrt{6}\right)^2-\left(14\sqrt{5}+6\sqrt{30}\right)^2}=72+28\sqrt{6}+4\sqrt{103+42\sqrt{6}}.$$

Próbáljuk meg az utolsó tagbeli gyököt egész C, D-vel $C+D\sqrt{6}$ alakban előállítani:

$$\sqrt{103+42\sqrt{6}}=C+D\sqrt{6},\quad C^2+6D^2=103,\quad CD=21, \tag{7}$$

és látjuk, hogy $C=7$, $D=3$, megfelel, így – csak a pozitív gyököt véve, úgyszintén a továbbiakban is –

$$(K+L)^2=72+28\sqrt{6}+28+12\sqrt{6}=100+40\sqrt{6}=20(5+2\sqrt{6}).$$

Észrevéve, hogy a zárójelben $5=2+3$ és $6=2\cdot 3$:

$$(K+L)^2=20\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2, K+L=2\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=2\sqrt{10}+2\sqrt{15}.$$

Hasonló átalakítás sikerül $K-L$-re. Az előzők felhasználásával

$$(K-L)^2=K^2+L^2-2KL=72+28\sqrt{6}-28-12\sqrt{6}=44+16\sqrt{6}=$$

$$=4(11+2\sqrt{24})=4\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)^2,\quad K-L=2\sqrt{3}+2\sqrt{8}.$$

Ezzel egyenletrendszert kaptunk K-ra és L-re, abból

$$K=\frac{1}{2}\big[(K+L)+(K-L)\big]=\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{8}.$$

Azt is kapjuk, hogy az L kifejezés is előállítható összeadással és kivonással négy pozitív egész szám négyzetgyökéből:

$$\sqrt{36+14\sqrt{6}-14\sqrt{5}-6\sqrt{30}}=\frac{1}{2}\big[(K+L)-(K-L)\big]=$$

$$=\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{8}.$$

Hasonlóan segítségül vehettük volna a következő kifejezéseket

$$\sqrt{36+6\sqrt{30}-14\sqrt{6}-14\sqrt{5}}=\sqrt{15}+\sqrt{8}-\sqrt{10}-\sqrt{3}\quad\text{és}$$

$$\sqrt{36+14\sqrt{5}-14\sqrt{6}-6\sqrt{30}}=\sqrt{10}+\sqrt{8}-\sqrt{15}-\sqrt{3};$$

a legutóbbi eredmény számítása a bemutatottnál egyszerűbb.

[1] Lásd pl. *Faragó L.:* Matematikai szakköri feladatgyűjtemény (2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1955) 60 fd. 13. o. *Laricsev–Varga:* Algebrai feladatok gyűjteménye: II. (10. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp. 1961.) 37. o.