I. megoldás. *a)* Azt mutatjuk meg, hogy (1) bal és jobb oldalának d különbsége nem negatív. Valóban, átalakításokkal

$$d=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)-9=\frac{1}{xy}[(x+1)(y+1)-9xy]=$$
$$=\frac{1}{xy}(x+y+1-8xy)=\frac{1}{xy}(2-8xy)=\frac{2}{xy}[1-4x(1-x)]=$$
$$=\frac{2}{xy}(1-2x)^2\geq 0,$$

az egyenlőség $1-2x=0$, $x=1/2=y$ esetén teljesül.

b) A vizsgálandó k kifejezést

$$k=u+v(1-u)$$

alakban írva a szorzat második tényezője a feltevés szerint pozitív, ezért a szorzat is, tehát k is pozitív, az első egyenlőtlenség helyes.

Másrészt $v(1-u)<1-u$, mert v pozitív és 1-nél kisebb, így $k<u+(1-u)=1$, az állítás második egyenlőtlensége is helyes. Egyenlőség egyik részben sem lehetséges.

Recski András (Budapest, Bolyai J. g. I. o. t.)

II. megoldás. *a)* Írjunk 9 helyett z-t és keressük meg z-nek azt a legnagyobb értékét, amellyel (1) még teljesül. (Nyilván $z>4$, hiszen a bal oldal mindkét tényezője 2-nél nagyobb.) Az I. megoldáshoz hasonlóan

$$d=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)-z=\frac{1}{xy}[x+y+1+(1-z)xy]=$$
$$=\frac{1}{xy}[2+(1-z)xy]\geq 0$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$2+(1-z)xy\geq 0,\quad \text{másképpen}\quad 2\geq(z-1)xy.$$

Mivel $z-1$ pozitív, feltételünk így írható:

$$xy\leq\frac{2}{z-1}.$$

z-t növelve a jobb oldal nevezője nő, a hányados csökken, így a legnagyobb z érték, amely mellett ez az egyenlőtlenség még minden megengedett x, y-ra érvényes, az, amelyre a jobb oldal egyenlő az xy szorzat legkisebb felső korlátjával. Ismeretes mármost a nem negatív számok számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenség, amelyből négyzetre emeléssel és a feltevés felhasználásával

$$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

és ebben az egyenlőség $x=y=1/2$ esetén valóban beáll. Így xy legkisebb felső korlátja $1/4$. Mostmár a

$$\frac{2}{z-1}=\frac{1}{4}$$

egyenletből $z=9$. Eszerint (1) fennáll, de tovább nem élesíthető, azaz 9 helyén nagyobb számmal már nem érvényes.

b) Azt kell megmutatnunk, hogy $u+v-uv$ a 0 és 1 közé esik, vagy hogy ezt 1-ből levonva 1 és 0 közé eső számot kapunk.

$$1-k=1-(u+v-uv)=(1-u)(1-v)$$

mindkét tényezője 1-nél kisebb és pozitív a feladat feltételei mellett, így szorzatukra is ez áll, és ezt akartuk bizonyítani.

Rapcsák Tamás (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. II. o. t.)