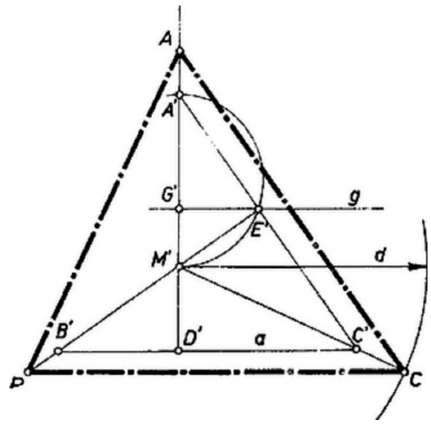
I. megoldás. A két adott arányból a keresett háromszöghöz hasonlót tudunk szerkeszteni. Ebből alkalmas nagyítással vagy kicsinyítéssel kapunk olyan háromszöget, amelyben a magasságpontnak a megfelelő csúcstól való távolsága d.



1. ábra

Legyen ABC a keresett háromszög, amelyben az M magasságpont az A csúcsból húzott AD magasságot $2:1$ arányban, a BE magasságot $3:2$ arányban osztja. Legyen E vetülete az AD magasságon G. Ekkor EG párhuzamos BC-vel, mert mindkettő merőleges AD-re, így MEG és MBD hasonló derékszögű háromszögek, átfogóik aránya $2:3$, ezért $MG=2MD/3$. Mivel még MEA derékszög, azért egy tetszés szerinti $A'D'$ szakaszból kiindulva a következőképpen szerkeszthetünk a keresett háromszöghöz hasonlót:

$A'D'$-t felosztjuk az M' ponttal $A'M':M'D'=2:1$ arányban. Megszerkesztjük az $A'M'$ szakasz M' felőli G' harmadoló pontját (erre teljesül a $G'M'=A'M'/3=2M'D'/3$ egyenlőség). G'-ben és D'-ben merőlegest állítunk $A'D'$-re, ezek g', ill. a'. Az $A'M'$ szakasz fölé ennek egyik partján írt Thalész-félkörrel metsszük g'-t E'-ben. Végül a'-ből $E'M'$-vel kimetsszük B'-t, $A'E'$-vel pedig C'-t.

Ekkor $A'C'$ merőleges $B'E'$-re, tehát az $A'B'C'$ háromszögben $A'D'$ és $B'E'$ magasságszakaszok, M' magasságpont, és ez a szakaszokat a kívánt arányban osztja.

Mérjük rá végül az adott d szakaszt M'-től az $M'C'$ félegyenesre, húzzunk párhuzamost a nyert C végponton át $C'A'$-vel és $C'B'$-vel. Ezeknek $M'A'$-vel, $M'B'$-vel való metszéspontját A-val, ill B-vel jelölve az ABC háromszög mindenben megfelel a feladat követelményeinek.

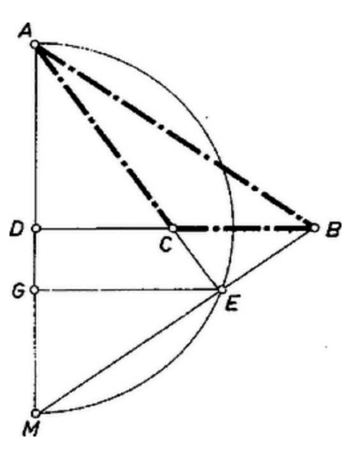
Szemkeő Judit (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Szerkesztésünk más adott osztási arányok mellett is használható. Ha ezek $m:n$ és $p:q$ (a sorrendet továbbra is a csúcsból számítva), akkor

$$M'G'=\frac{q}{p}\cdot M'D'=\frac{q}{p}\cdot\frac{n}{m}\cdot M'A',$$

és E' létrejön, ha $M'G'<M'A'$, azaz $nq<mp$. (Ha itt $m<n$, akkor nyilván $p>q$, azt találtuk tehát, hogy hegyesszögű háromszögben a magasságpont legfeljebb egy oldalhoz képest lehet a magasságszakasz „felső”, a csúcs felőli felében.)

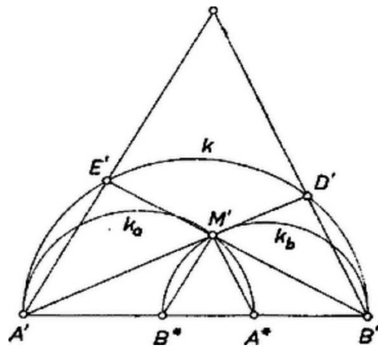
2. Ha a magasságpontról tudjuk, hogy egy magasságszakasznak a meghosszabbításán van, akkor ez áll a további két magasságszakaszra is, és a háromszög tompaszögű. Így M csak ún. *külső* osztópont lehet. Ilyen háromszögben M a legnagyobb oldalhoz tartozó magasságnak a csúcson túli meghosszabbításán van, és így a fentiek szerint vett arányértéke 1-nél kisebb, a másik két magasságnak viszont a *talpponton* túli meghosszabbításán van M, és az arány értéke 1-nél nagyobb. Az adott két arányt így értelmezve a szerkesztés első felét – lényegében változatlanul – a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Nagy Klára és *Domokos Zsuzsa* (Makó, József A. g. II. ill. I. o. t.)

II. megoldás. A fenti $A'B'C'$ háromszög-alakból először az $A'B'M'$ háromszöget szerkesztjük meg. Ezzel a feladatot lényegében megoldottuk, ismeretes ugyanis, hogy C' az $A'B'M'$ háromszög magasságpontja.



3. ábra

Húzzunk párhuzamost M'-n át a $C'B'$ és $C'A'$ oldallal, messék ezek $A'B'$-t A^*-ban, ill. B^*-ban. Ekkor A^* az A'-től B'-ig terjedő szakaszt ugyanolyan arányban osztja, mint M' az $A'D'$ szakaszt, vagyis $A'A^* : A^*B' = 2 : 1$, és hasonlóan $B'B^* : B^*A' = 3 : 2$. Ezek szerint egy tetszés szerinti $A'B'$ szakaszból kiindulva A^* és B^* megszerkeszthető.

Másrészt $A'M'A^*\sphericalangle = A'D'B'\sphericalangle = 90°$, tehát M' rajta van az $A'A^*$ átmérő fölötti k_a Thalész-körön. Ugyanígy a B^*B' átmérő fölötti k_b Thalész kör is átmegy M'-n, tehát M' megszerkeszthető. Most már az $A'B'$ átmérő fölötti k Thalész-körből $A'M'$ kimetszi D'-t, $B'M'$ kimetszi E'-t, és így a $B'D'$ és $A'E'$ egyenesek metszéspontja C'.

A szerkesztés az adott arányok helyén az $m : n$ és $p : q$ arányokkal egyértelműen végrehajtható, ha B' az AA^* szakaszon adódik, más szóval ha $A'A^* + B'B^* > A'B'$, azaz

$$\frac{A'A^*}{A'B'} + \frac{B'B^*}{B'A'} = \frac{m}{m+n} + \frac{p}{p+q} > 1.$$

Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy – ha m, n, p, q pozitívok – ez a feltétel egyenértékű a fenti $mp > nq$ feltétellel.

Takács Ferenc (Győr, Benedekrendi Czuczor G. g. II. o. t.)