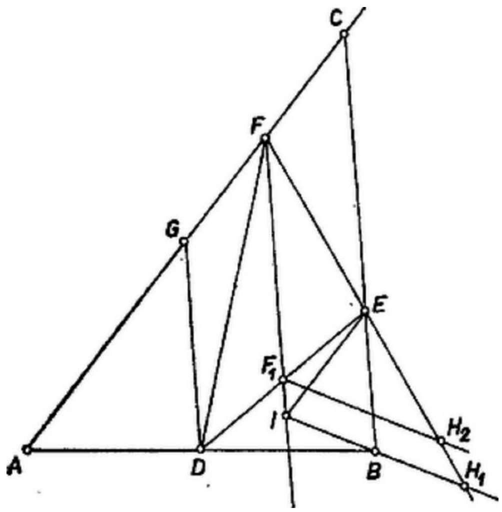
I. megoldás. Képzeljük a feladatot megoldottnak. Megmutatjuk, hogy az F-en át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes felezi a DE szakaszt. Jelöljük ki az AC oldal G felezőpontját és DE-n az F_1 felezőpontot. Ekkor F a CG felezőpontja, továbbá DG az ABC háromszög középvonala, így párhuzamos BC-vel. Ennek folytán a $CEDG$ négyszög trapéz és FF_1 a középvonala, tehát párhuzamos BC-vel.



1. ábra

Mivel az F ponton át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes egyértelműen meg van határozva, így ha fordítva járunk el: F-en át húzunk párhuzamost BC-vel, akkor is annak a DE szakasz F_1 felezőpontján kell átmennie.

A középvonalak hosszára vonatkozó összefüggések alapján FF_1 hosszából meg tudjuk határozni CE hosszát.

$$DG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot CE = \frac{3}{4}CE \qquad \text{és}$$

$$FF_1 = \frac{1}{2}(DG+CE) = \frac{7}{8}CE, \qquad \text{azaz} \qquad CE = \frac{8}{7}FF_1.$$

Ennek alapján meg tudjuk határozni C-t, abból B-t, majd CF és BD metszéspontjaként A-t. Pl. a következőképpen járhatunk el (előrebocsátjuk, hogy D, E, F egy háromszög oldalainak belső pontjai, így nem lehetnek egy egyenesen).

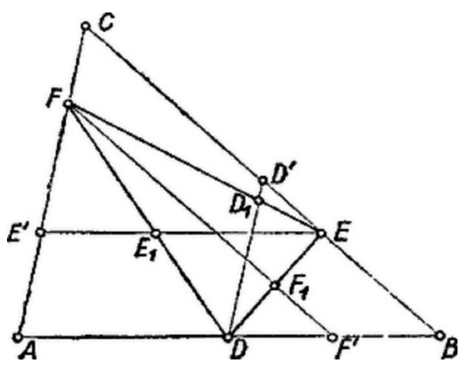
Szerkesszük meg DE-n az F_1 felezőpontot, FE-nek E-n túli meghosszabbítására pedig mérjük rá az $EH_1 = EF$ és $EH_2 = \frac{3}{4}EF$ távolságot. Legyen a H_1-en át H_2F_1-gyel párhuzamosan húzott egyenes és az FF_1 egyenes metszéspontja I. Ekkor $FI = \frac{8}{7}FF_1$. Szerkesszük meg az ezzel egyenlő és párhuzamos EC szakaszt a DE egyenesnek azon az oldalán, amelyiken F van. Legyen a szakasz meghosszabbításának metszéspontja H_1I-vel B. Ekkor EB az FH_1I háromszög középvonala, így az $FI = CE$ szakasz felével egyenlő. E tehát a BC szakasz B felőli harmadoló pontja. A-t úgy kapjuk, mint BD és CF metszéspontját.

Messe a D-n át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes AC-t G-ben. A $CEDG$ trapéz FF_1 középvonalára $(DG+CE)/2 = FF_1$ innen

$$DG = 2FF_1 - CE = \left(2\cdot\frac{7}{8}-1\right)CE = \frac{3}{4}CE = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}BC = \frac{1}{2}BC,$$

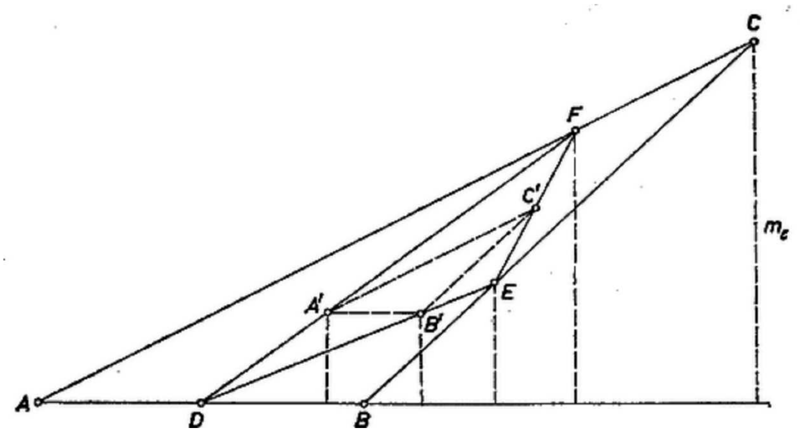
DG tehát az ABC háromszög középvonala, D és G az AB és AC oldalak felezőpontja, F pedig a CA oldal C-hez közelebbi negyedelő pontja. Ezzel a szerkesztés helyességét bebizonyítottuk.

A szerkesztés minden lépése egyértelmű. A háromszög létrejön, a BD és CF egyenesek ugyanis nem párhuzamosak, mert $CF \parallel EI$ és I a DE egyenesnek ugyanarra az oldalára esik, mint B, a BE egyenesnek pedig ugyanarra az oldalára, mint D. Ebből következik, hogy az EI egyenes a BED szögtartományban halad, tehát metszi a B-ből D-n át húzott félegyenest.



2. ábra

Megjegyzés. Meghatározhatnánk F_1-éhez hasonlóan annak a D_1, ill. E_1 pontnak az osztásarányát a DEF háromszög kerületén, amelyet a D-n át AC-vel, ill. E-n át AB-vel párhuzamosan húzott egyenes metsz ki a szemközti EF, ill. FD oldalból ($ED_1 : EF = 1 : 4$, $FE_1 : FD = 5 : 9$). Ennek alapján megszerkeszthetnénk a három oldal irányát és ebből a keresett háromszöget. Az így adódó szerkesztés helyességének igazolása azonban lényegesen bonyolultabb lenne, mint a föntié. Számos versenyző az utóbbi eljárást adta meg – igazolás nélkül.



3. ábra

II. megoldás (részlet). Osszuk ketté az ED szakaszt a B' ponttal a CA oldalra előírt arányban, vagyis legyen $EB' : ED = CF : CA = 1/4 = z$, továbbá a DF oldalt az A' ponttal a BC oldalra előírt arányban: $DA' : DF = BE : BC = 1/3 = y$. Ekkor $A'B'$ párhuzamos AB-vel. Ugyanis A'-nek AB-től való távolsága y-szor akkora, mint F távolsága AB-től, ez pedig $(1-z)$-szerese az ABC háromszög m_c magasságának, tehát A' távolsága $y(1-z)m_c$, másrészt hasonlóan ugyanezt a kifejezést kapjuk B'-nek AB-től való távolságára. Ha még az FE oldalon úgy szerkesztjük C'-t, hogy álljon $FC' : FE = AD : AB = 1/2$, akkor hasonlóan $A'C' \parallel AC$ és $B'C' \parallel BC$, tehát az ABC háromszög oldalegyeneseit úgy kapjuk, hogy vesszük D-n, E-n, F-en át rendre az $A'B'$-vel, ill. $B'C'$-vel, ill. $C'A'$-vel párhuzamos egyenest.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)