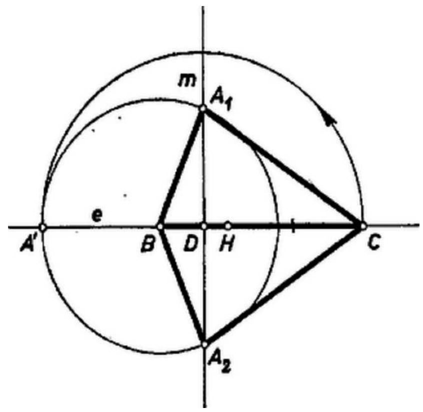
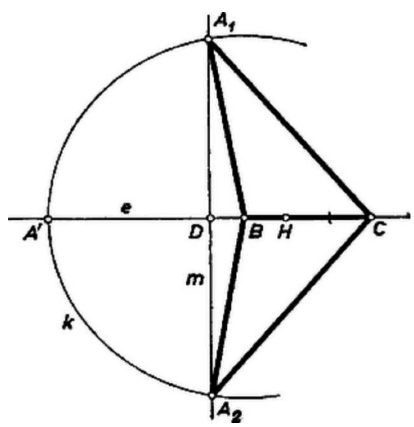
I. megoldás. Képzeljük a feladatot megoldottnak, legyen a háromszög harmadik csúcsa A, forgassuk rá a BA oldalt B körül BC-nek B-n túli meghosszabbítására, és legyen a végpont A' (1. ábra). Ekkor az ABA' egyenlő szárú háromszög CBA külső szöge kétszer akkora, mint az $AA'B\sphericalangle = AA'C\sphericalangle$. Másrészt a CBA szög a feltevés szerint az $ACB = ACA'$ szögnek is kétszerese, tehát $AA'C\sphericalangle = ACA'\sphericalangle$, az ACA' háromszög egyenlő szárú. Így A' megszerkeszthető, mint C-nek D-re vett tükörképe, és a BA' szakaszban megkapjuk a BA oldal hosszát. Most már A-t az adott e egyenesre D-ben állított m merőlegesből a B körül BA' sugárral írt k kör metszi ki. – A szerkesztés helyessége nyilvánvaló, bizonyítását mellőzhetjük.



1. ábra

Megoldást csak akkor kapunk, ha m két pontban metszi k-t. Ilyenkor a két metszéspont és vele a két megfelelő ABC háromszög is tükrös e-re, mint tengelyre. Ha ugyanis m érinti k-t, akkor egyetlen közös pontjuk D, és ez nem használható A gyanánt. Ekkor $A'D$ a k átmérője, $A'D = 2BD$, másrészt $A'D = CD$, tehát $CD = 2\,BD$, és D közte van B-nek és C-nek, vagyis D egybeesik a BC szakasz B-hez közelebbi H harmadoló pontjával.

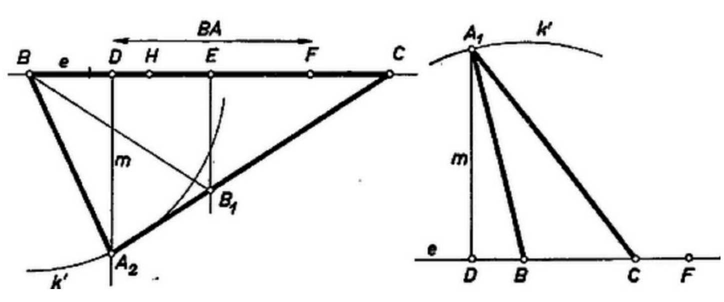


2. ábra

Hasonlóan kapjuk annak feltételét, hogy m és k-nak két közös pontja legyen. Mindig ez adódik, ha B szétválasztja D-t és C-t (2. ábra), hiszen ekkor D szétválasztja B-t és A'-t, a k középpontját és egy kerületi pontját. Még akkor is metszi egymást m és k, ha D a BC szakaszon van és belső pontja k-nak, vagyis $BD < BA'$ (1. ábra). Ekkor ugyanis $DA' = DB + BA' > DB + DB = 2BD$, tehát $CD > 2BD$, D a fenti H-val határolt BH szakaszon van. Hasonlóan látható be, hogy ha D az e-nek azon a félegyenesén van, melynek kezdőpontja H és amely C-n át halad, akkor nincs megoldás.

Kádár Krisztina (Budapest, Dózsa Gy. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Sok dolgozat szerint a megoldások száma 1. Ez akkor helyes, ha az ABC háromszög *méreteit* kérdezzük. Itt azonban helyzet-feladattal álltunk szemben, B, C, D megadott helyzetéből A megfelelő helyzeteit kellett meghatároznunk. (Az említett megállapítást nem tekintettük hiánynak.)



3. ábra

II. megoldás. Messe a CBA szög felezője az AC oldalt B_1-ben, és legyen B_1 vetülete e-re E (3. ábra), akkor $B_1BC\sphericalangle = B_1CB\sphericalangle$, a B_1BC háromszög egyenlő szárú, E felezi a BC szakaszt. Másrészt a szögfelező osztás arányára, valamint az ACB szög szárain az AD és B_1E párhuzamosokkal létrehozott szeletek arányára ismert tételek alapján

$$AB : BC = AB_1 : B_1C = DE : EC = DE : \frac{BC}{2},$$

tehát $AB = 2\ DE$. Eszerint A-t a D-ben e-re emelt m merőlegesből B körül. $2\ DE$ sugárral írt k' körrel metszhetjük ki.

Ezeket tudva B_1 és E megszerkesztését mellőzhetjük. Ha ugyanis D-nek E-re vett tükörképe F, akkor $BA = DF$, F-et pedig úgy is megkaphatjuk, hogy a BD szakaszt C-ből az irányával ellentétes irányban felmérjük. Az ABD derékszögű háromszög megszerkeszthető, ha $BD < 2DE$ vagyis ha D a BH szakaszon van, ahol H a BE szakasznak B-től számítva második harmadolópontja.

Vigassy Lajos

Megjegyzés. Az utóbbi eredmények felhasználásával könnyű megmutatni, hogy a keresett háromszög DA magassága mértani középarányos egyrészt a DC szakasz, másrészt a $DC - 2BD$, ill. a $DC + 2BD$ hosszúságú szakasz között, aszerint, hogy D a BC szakaszon, ill. a meghosszabbításon van. Ebből is látható, hogy belső D pont esetén a megoldhatóság feltétele: $DC \geqq 2DB$.

Kláris László (Budapest, Bem J. Gimn. II. o. t.)