I. megoldás. A gyökjel alatti kifejezés x megadott kifejezésének behelyettesítésével így alakul:

$$\frac{a^2}{x^2}+1=\frac{4a^2b^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}+1=\frac{4a^2b^2+a^4-2a^2b^2+b^4}{\left(a^2-b^2\right)^2}=$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}=\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}\right)^2.$$

Így a K-ban felhasználandó pozitív négyzetgyök

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2},\qquad \text{ill.}\qquad -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

aszerint, hogy $b^2<a^2$, ill. $b^2>a^2$ (egyenlőség esetén K-nak nincs értelme). Ezért az első esetben

$$K'=\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b},$$

a második esetben pedig

$$K''=\frac{2ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=-\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{b-a}{a+b},$$

Az egyszerűsítés megengedett volt, mert ha $b^2-a^2\neq 0$, akkor sem $a+b$, sem $a-b$ nem 0.

Megjegyezzük még, hogy az x-szel való osztás elvégzésében $b\neq 0$ korlátozást is feltételeztük.

Tongori Éva (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Többen kimondták, hogy K mindig pozitív. A megállapítás helyes, mert a négyzetgyök pozitív, az előtte álló tag abszolút értékben kisebb, így ennek előjelétől függetlenül az összeg pozitív. A megoldók indokolása azonban a nyert végső alakot vette figyelembe és csak azt az esetet, ha a is, b is pozitív, holott betűkkel nem csak pozitív számokat jelölhetünk.

II. megoldás. Az adott kifejezés szerkezete emlékeztet a másodfokú egyenlet gyökképletének következő alakjára:

$$x^2+px+q=0\text{-ból}\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Az az egyenlet, amelynek K az egyik gyöke (ti. a nagyobb gyök, amelyhez a diszkrimináns négyzetgyökét + jellel vesszük), az ismeretlent z-vel jelölve, a következő:

$$z^2-\frac{2a}{x}z-1=0.$$

x adott kifejezését behelyettesítve, szorzással

$$z^2-\frac{4ab}{a^2-b^2}z-1=0. \tag{1}$$

A második tag együtthatójának -1-szerese így írható:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2-(b-a)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}+\frac{(b-a)^2}{b^2-a^2}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{b-a}{a+b}. \tag{2}$$

Az átalakítás két tagjának szorzata -1, egyenlő az (1)-beli ismert taggal. És mivel (1)-ben z^2 együtthatója 1, ezért a gyökök és az együtthatók ismert összefüggései alapján kimondhatjuk, hogy (1) gyökei

$$\frac{a+b}{a-b}\quad\text{és}\quad\frac{b-a}{a+b}.$$

A két gyök ellentett jelű, mert szorzatuk -1, ezért a nagyobb gyök, K keresett értéke, a pozitív gyök. Ez (2) utolsó előtti alakjára tekintettel

$$a^2-b^2>0\quad\text{esetén az első tag:}\quad z=K'=\frac{a+b}{a-b},$$
$$b^2-a^2>0\quad\text{esetén a második tag:}\quad z=K''=\frac{b-a}{a+b}.$$

*Szentai Judit (*Budapest, Kanizsay D. lg. II. o. t.)