Az előírt hat kezdő jeggyel írt 444 445 szám nem teljes négyzet, mert az 5-re végződő négyzetszámok utolsó két jegye 2 és 5. Ezért a keresett N^2 számnak további számjegyei is vannak. Tegyük fel egyelőre, hogy ezek száma páros és jelöljük $2k$-val. Így N^2 nagyobb az adott jegyekkel kezdődő legkisebb $2k+6$ jegyű $444\,445\cdot 10^{2k}$ számnál, de kisebb a legkisebb olyan $2k+6$ jegyűnél, melynek hatodik jegye 1-gyel nagyobb az előírt 5-ösnél:

$$444\,445\cdot 10^{2k} < N^2 < 444\,446\cdot 10^{2k}.$$

Innen négyzetgyökvonással N^2 alapjára

(1) $$\sqrt{444\,445}\cdot 10^k < N < \sqrt{444\,446}\cdot 10^k.$$

Azt a legkisebb k értéket kell megkeresnünk, amelyre (1) szélső tagjai között van egész szám, és erre az esetre N gyanánt a legkisebb ilyen egész számot kell vennünk. Innen osztással

$$\sqrt{444\,445} < \frac{N}{10^k} < 444\,446.$$

Számítsuk ki 444 445 négyzetgyöke (végtelen) tizedes tört alakjának egész jegyeit és néhány tizedes jegyét:

$$\sqrt{444\,445} = 666,\ 667\ 0\ \ldots$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$666{,}6, \qquad 666{,}66 \qquad 666{,}667 \qquad 666{,}6670$$

számok négyzete még kisebb 444 445-nél. Viszont a

(2) $$666{,}7, \qquad 666{,}67 \qquad 666{,}668 \qquad 666{,}6671$$

számok négyzete már nagyobb nála. Más szóval az utóbbi sorban azokat a legkisebb számokat írtuk fel, amelyekben a tizedes jegyek száma rendre 1, 2, 3, 4, és amelyek négyzete már nagyobb 444 445-nél. Így ezek $N/10^k$ lehetséges legkisebb értékét adják $k=1$, 2, 3, ill. 4 esetére. Ezeket a számokat (1) bal oldalára írva az egyenlőtlenséget ***szűkítjük***. A növelés miatt a $<$ jel helyére léphet $\leqq$ is. Hasonlóan

$$\sqrt{444\,446} = 666,\ 667\ 7\ldots$$

Ebből felírhatjuk azokat a legnagyobb számokat, amelyekben a tizedes jegyek száma rendre 1, 2, 3, 4, és amelyek négyzete még kisebb 444 446-nál:

(3) $$666{,}6, \qquad 666{,}66 \qquad 666{,}667 \qquad 666{,}6677.$$

Ezek a számok $N/10^k$ legnagyobb lehetséges értékét adják, feltéve, hogy $k=1$, 2, 3, ill. 4. Azokhoz a k számokhoz tartozik az előírt jegyekkel kezdődő $2k+6$ jegyű négyzetszám, amelyekhez a (2) alatti legkisebb megengedhető érték nem nagyobb a (3) alatti ugyanannyi tizedes jegyet tartalmazó legnagyobb lehetséges értéknél. Ez először a 4 tizedes jegyű értékekre következik be, így k legkisebb lehetséges értéke 4, és

$$666,\ 6671 \leqq \frac{N}{10^4} \leqq 666,\ 6677.$$

Innen

$$6\,666\,671 \leqq N \leqq 6\,666\,677.$$

A legkisebb, N gyanánt választható érték 6 666 671, eszerint ha az előírt első hat jegy után páros számú számjegynek kell állnia, akkor $N_1^2 = 6\,666\,671^2$.

Visszatekintve mondhatjuk, hogy N_1 egymás utáni jegyeit úgy kapjuk, hogy vesszük 444 445 és 444 446 négyzetgyökének első, második, ... jegyét mindaddig, amíg a megfelelő jegyek megegyeznek, ha pedig a két négyzetgyökben a megfelelő helyeken különböző jegy áll, a kisebb jegynél 1-gyel nagyobb jegyet írjuk le. (Ez nem lehet 9-es, mert akkor már egy korábbi jegyben kell különbözniük a gyököknek.)

Hasonlóan járhatunk el abból a feltevésből kiindulva, hogy N^2-ben az előírt hat jegy utáni további jegyek száma páratlan: $2k+1$. Így

$$444\,445\cdot 10^{2k+1} < N^2 < 444\,446\cdot 10^{2k+1},$$

$$\sqrt{4\,444\,450} < \frac{N}{10^k} < \sqrt{4\,444\,460},$$

$$\sqrt{4\,444\,450} = 2\,108{,}186\ldots, \quad \sqrt{4\,444\,460} = 2\,108{,}188\ldots$$

és így

$$N_2^2 = 2\,108\,187^2 = 4\,444\,452\,426\,969;$$

N_2 kisebb N_1-nél, ezért a keresett szám N_2^2.

Bóta Károly (Budapest, Steinmetz M. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. Már 444 445 négyzetgyökének egész közelítő értékeiből, 666-ból és 667-ből várható, hogy legkésőbb a negyedik tizedes jegyben különböző jegyet ad a két négyzetgyökvonás. Ugyan is

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1,$$

tehát míg az alap 1-gyel nő, a négyzet $2n+1$-gyel, vagyis $2n+1$-szer annyival nő. Ebből kézenfekvő az a sejtés, hogy 444 445 és 444 446 négyzetgyökének egymástól való eltérése kb. $1/1333 \approx 6/8000 > 0{,}0007$.