Megoldás. I. Célszerű rendszeresen felsorolni azokat a számokat, amelyek két természetes szám négyzetének összegeként írhatók, hogy kiválaszthassuk közülük a legkisebb két, ill. 3 szomszédos számot. Írjuk pl. egymás alá egy-egy négyzetszámnak az előzőkkel való összegét és a kétszeresét:

1	4	9	16	25
2	5	10	17	26 ...
	8	13	20	29 ...
		18	25	34 ...
			32	41 ...
				50 ...

A táblázat felírt részében találjuk a 17, 18 számpárt. Mivel a következő oszlop legkisebb száma is 26, a későbbieké pedig még nagyobb, így ez a legkisebb megfelelő számpár.

A számhármasok kereséséhez jobb áttekintést ad, ha a kapott összegeket (egyelőre csak 100-on alul maradva) növekedő sorrendben, az I. oszt. tankönyv „két bemenetű” négyzetszám táblázatának mintájára rendezzük, egymás utáni sorokba írva azokat a számokat, melyeknek tízese rendre 0, 1, 2, ..., 9, és egymás utáni oszlopokba azokat, melyeknek egyese rendre 0, 1, 2, ..., 9. Pl. A „0” jelű sor és az „5” jelű oszlop közös mezeje az 5 számnak felel meg, ebben az 1^2+2^2 előállítást röviden 1; 2-vel jelezzük.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			1;1			1;2			2;2	
1	1;3			2;3				1;4	3;3	
2	2;4					3;4	1;5			2;5
3			4;4		3;5			1;6		
4	2;6	4;5				3;6				
5	1;7 5;5		4;6	2;7					3;7	
6		5;6				1;8 4;7			2;8	
7			6;6	8;8	5;7					
8	4;8		1;9			2;9 6;7				5;8
9	3;9							4;9	7;7	

Előbbi összegeink felbontásait ide oszloponként beírva, az első megfelelő számhármas a 72, 73, 74.

II. Négy egymás utáni egész szám közül kettő páros, kettő páratlan. Az utóbbiak két egész szám összege gyanánt csak egy páros és egy páratlan tagból adódhatnak ki. Mármost páros négyzetszám csak páros alap négyzete lehet, páratlan négyzetszám pedig csak páratlan alap négyzete, mert ha n egész szám, akkor $(2n)^2 = 4n^2 = 4k$, páros, és $(2n+1)^2 = 4n(n+1)+1 = 4k+1$, páratlan. Ezek 4-gyel osztva 0, ill. 1 maradékot adnak, tehát összegük is 0, vagy 1, vagy 2 maradékot ad 4-gyel osztva. Nem lehet tehát két tagú négyzetösszeg 4-gyel való osztásánál a maradék 3, márpedig az egymás utáni páratlan számokat 4-gyel osztva a maradék váltakozva 1 és 3. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Kiss Árpád (Budapest, Bláthy O. Erősáramú Ip. Techn. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A talált számok közül 18 és 72 két egyenlő négyzetszám összege. Ha a feltételeket emelve ilyet nem fogadunk el, akkor az első pár $25 = 3^2+4^2$, $26 = 1^2+5^2$, az első hármas pedig $232 = 6^2+14^2$, $233 = 8^2+13^2$, $234 = 3^2+15^2$.

Surányi László (Budapest, V., Szemere u. Ált. Isk. VIII. o. t.)

2. A megfelelő számhármasok első tagja osztható 8-cal. A fentiek szerint csak $8k$, $8k+1$, $8k+2$ és $8k+4$, $8k+5$, $8k+6$ alakú számhármasokról lehet szó. Az utóbbi azonban lehetetlen. Ismeretes ugyanis[1]) hogy ha egy páros szám előállítható két egész szám négyzetösszege gyanánt, akkor a fele is :

$$2x = a^2+b^2\text{-ből következik}\quad x = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

és ezt $8k+6$-ra alkalmazva azt kapnánk, hogy $4k+3$ előállítható.

Másrészt megfelelő számhármas egyik tagja osztható 3-mal, és ezért 9-cel is. Ugyanis a $3n$, $3n+1$, $3n+2$ alakú számok négyzete

$$9n^2, \quad 3(3n^2+2n)+1 = 3k+1, \quad 3(3n^2+4n+1)+1 = 3k+1$$

[1]Lásd pl.*Hajós–Neukomm–Surányi: Matematikai versemytételek II.* (Tankönyvkiadó, Budapest 1967.) 59. o.

alakú. Két ilyen szám összege nyilván csak úgy lehet osztható 3-mal, ha egyik tag sem $3k+1$ alakú, ezért az előállítás $9(n_1^2+n_2^2)=9k$ alakú. Ezek szerint egy megfelelő számhármas legkisebb száma osztható 8-cal és vagy osztható 9-cel, vagy 1-gyel, vagy 2-vel kisebb egy 9-cel osztható számnál. Könnyen látható, hogy akkor ez a szám 72-vel osztva 0, 8, ill. 16 maradékot ad.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. I. o. t.)

3. A $16=0^2+4^2$, 17, 18 számhármas nem felel meg, mert a 0 nem természetes azám (többen ezt adták meg).