I. megoldás. Legyen a kérdéses szám $N=\overline{abcd}$. Különválasztunk egy lehetőleg nagy, 99-cel osztható részt:

$$N=100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}=99\cdot\overline{ab}+\overline{ab}+\overline{cd}.$$

Az utolsó két szám összege kisebb mint 200 és osztható 99-cel, tehát csak 0, 99, vagy 198 lehet; az első csak $a=b=c=d=0$ esetén következik be, az utolsó pedig csak akkor, ha mindkét szám 99, tehát $a=b=c=d=9$. A számjegyek összege az előbbi esetben $0=0\cdot 18$, az utóbbiban $36=2\cdot 18$. Minden más esetben

$$\overline{ab}+\overline{cd}=10(a+c)+(b+d)=99.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy a $b+d$ összeg egyes jegye 9. Másrészt $b+d\leqq 18$, tehát $b+d=9$, $a+c=9$ kell, hogy legyen, s így $a+b+c+d=18$. A feladat állítása tehát helyes.

Bornes Nándor (Budapest, I. István Gimn. I. o. t.)

II. megoldás. Egy 99-cel osztható szám osztható 9-cel is, 11-gyel is. Eszerint az előbbi jelölésekkel[1]

(1a) $$a+b+c+d=9m,$$

(1b) $$(d+b)-(c+a)=11n,$$

ahol m és n egész számok. ($1a$) alapján elég azt megmutatnunk, hogy m páros.

Mivel $d+b$ és $c+a$ legnagyobb értéke $9+9=18$, legkisebb értéke 0, azért ($1b$) bal oldala nem lehet nagyobb $18-0=18$-nál és nem lehet kisebb $0-18=-18$-nál. Így n értéke gyanánt csak -1, 0 és $+1$ jöhet szóba. Megmutatjuk, hogy csak $n=0$ lehetséges.

($1a$) és ($1b$) összegét és különbségét 2-vel osztva

(2a) $$d+b=\frac{9m+11n}{2},$$

(2b) $$c+a=\frac{9m-11n}{2}.$$

$n=1$ esetén innen csak páratlan m-mel kapunk egész számot. Nem lehet azonban $m=1$, mert úgy ($1a$)-ból $d+b\leqq 9$, ($1b$)-ből viszont $d+b\geqq 11$, ellentmondás. m helyén nagyobb páratlan számmal pedig $d+b$-re ($2a$)-ból legalább 19-et kapunk, ez szintén lehetetlen.

$n=-1$ esetén ($2b$)-ből kiindulva ugyanezeket kapjuk $c+a$-ra.

Ha már most $n=0$, akkor ($1b$)-ből $d+b=a+c$, így ($1a$) bal oldala $2(a+c)$ alakban írható, tehát páros. Ezt akartuk bizonyítani.

Magyar Ferenc (Tatabánya, Árpád Gimn. II. o. t.)

III. megoldás. A 0 és 9999 számokra érvényes a feladat állítása. A többi szóba jövő szám $N=99\,k$ alakú, ahol k egész és $1\leqq k\leqq 100$. Ez így is írható:

$$N=(100-1)k=100k-k=100(k-1)+(100-k).$$

Itt az első tag 100-nak nem negatív egész többszöröse, a második tagra pedig $0\leqq 100-k\leqq 99$. Így 100-k az N utolsó két jegyéből álló szám, $k-1$ pedig az ezek elhagyásával visszamaradó szám (0, ha $N=99$). E két szám összege

$$(k-1)+(100-k)=99.$$

A két számot összeadva az 1-es jegyek összegéből nem adódhat átvinni való 10-es, mert a jegyek összege legfeljebb 18; ezért az 1-es helyen levő jegyek összege is, a 10-es helyen levőké is 9, együtt 18, a bizonyítandó állításnak megfelelően.

Szabó Zoltán (Győr, Czuczor G. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. E megoldás záró lépése azonos az I. megoldásével, de más úton jutottunk hozzá.

[1] A 11-gyel való oszthatóság itt felhasznált ismertető jelét röviden lásd pl. *Radványi László: Az oszthatóság egy általános ismertető jeléről,* K. M. L. 24 (1962/1) 12. o.; bővebben: 609. gyak. K. M. L. 21 (1960/11) 145. o.