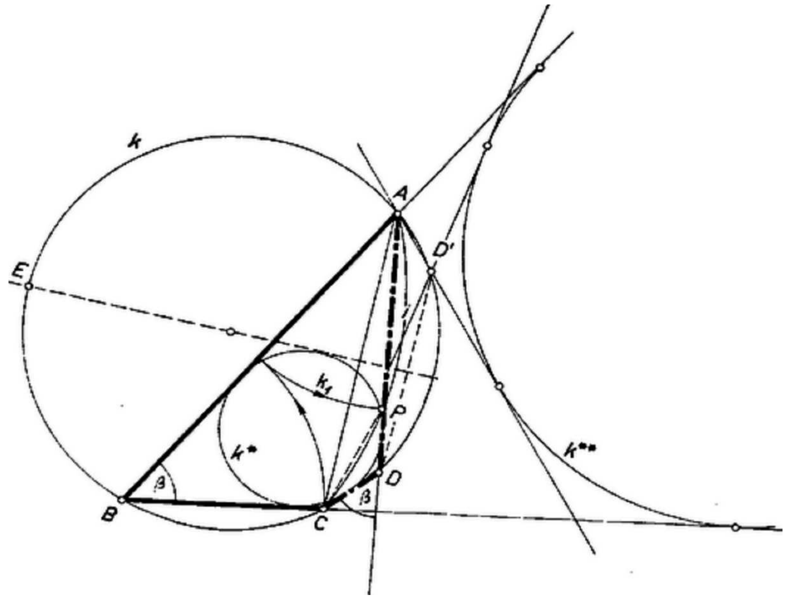


1. ábra

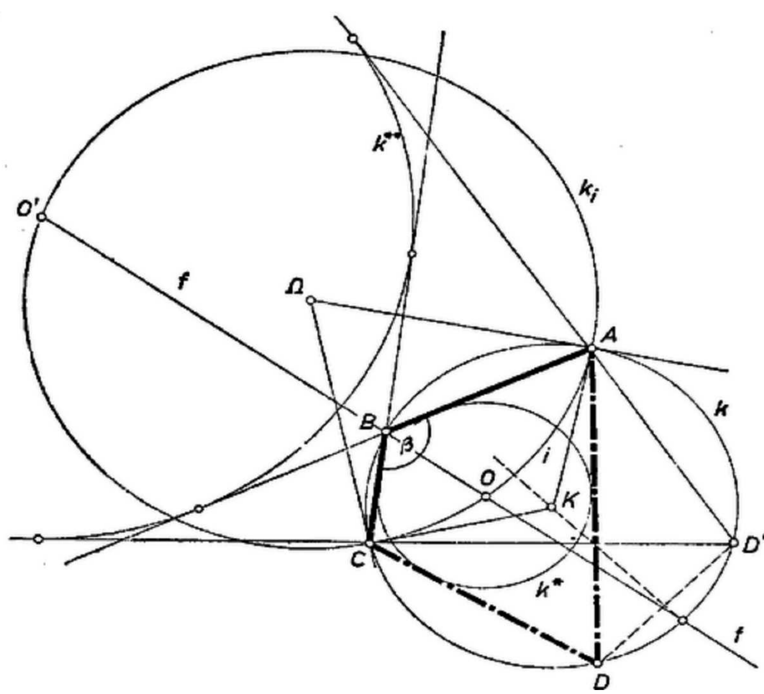
I. megoldás. Olyan D pontot keresünk, amellyel az $ABCD$ négyszög oldalait érintő kör a négyszög belsejében van. Ekkor, mint ismeretes, $AB + CD = BC + AD$. Gondoljuk megoldottnak a feladatot és válasszuk a betűzést úgy, hogy álljon $AB \geq BC$. ($AB = BC$ esetén nyilvánvaló, hogy D a B-vel átellenes pont. Az $AB < BC$ esetben $DA > DC$.)

Mérjük rá DA-ra a $DP = DC$ szakaszt (1. ábra). Így egyrészt

(1) $$AP = AD - DP = AD - CD = AB - BC,$$

ismert. Másrészt a CDP háromszög egyenlő szárú, D-nél levő külső szöge egyenlő az $ABC = \beta$ szöggel, mert $ABCD$ húrnégyszög, ezért $CPD\sphericalangle = \beta/2$ és $APC\sphericalangle = 180^\circ - \beta/2$. Ezek szerint az APC háromszögben ismerjük az AP, AC oldalakat és az utóbbival szemben fekvő szöget.

Ezek alapján megszerkeszthetjük P helyzetét. P egyrészt az A körül AP sugárral írt k_1 körön van, másrészt azon az i köríven, amelyről AC látószöge $180^\circ - \beta/2$, és amely az AC egyenes D-vel egyező, tehát B-vel ellentétes oldalán van. i középpontjából AC-t $2CPD\sphericalangle = \beta$ szögben látjuk – ugyanúgy, mint B-ből –, ezért az i-t tartalmazó kör E középpontját k-ból AC felező merőlegese metszi ki. P ismeretében a keresett D-t az AP egyenes metszi ki k-ból.



2. ábra

P mindig létrejön, mert k_1 középpontja az i végpontjában van, és k_1 sugara kisebb az i-hez tartozó AC húrnál, ugyanis az ABC háromszögből $AP = AB - BC < AC$. Éspedig P a k belsejében van, mert i-re is ez áll; ugyanis i

pontjaiból AC-t nagyobb szögben látjuk, mint a k-hoz tartozó, D-t tartalmazó AC ív pontjaiból, hiszen $180^\circ - \beta/2 > 180^\circ - \beta$. P-re mindig 1 megoldást kapunk.

A kapott D pont megfelel a követelménynek. Ugyanis k-nak B-t nem tartalmazó AC ívén van, ezért $ADC\sphericalangle = 180^\circ - \beta$, így a CDP háromszögből

$$PCD\sphericalangle = APC\sphericalangle - ADC\sphericalangle = \left(180^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - (180^\circ - \beta) = CDP\sphericalangle,$$

tehát ez a háromszög egyenlő szárú, $CD = DP$, így

$$DA - DC = AB - BC, \quad \text{vagyis} \quad DA + BC = AB + DC.$$

Ez pedig elegendő feltétele annak, hogy az $ABCD$ (konvex) négyszög belsejébe lehessen beírni az oldalakat érintő kört. – Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Aczél Gábor (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.) dolgozata,
bizonyítással és diszkusszióval kiegészítve.

II. megoldás. Megszerkesztjük a beírt k^* kör O középpontját (2. ábra). Ezt ismerve megrajzolhatjuk k^*-ot, mert az $ABCD$ négyszög AB, BC oldalai ismertek, így pedig D-t az A-ból k^*-hoz húzott második érintővel metszhetjük ki k-ból.

O egyrészt rajta van az ismert ABC szög felezőjén, úgyszintén DAB és DCB szögek felezőjén is. Másrészt az $ABCO$ négyszögben

$$AOC\sphericalangle = 360^\circ - ABC\sphericalangle - (OAB\sphericalangle + OCB\sphericalangle).$$

A zárójelben a DAB és DCB szögek összegének fele áll, ez pedig 90°, mert $ABCD$ húrnégyszög, tehát a mondott szögek összege 180°. Így

$$AOC\sphericalangle = 270^\circ - \beta,$$

ismert. Ezzel második mértani helyet kaptunk O-ra. Ha ugyanis β hegyesszög, akkor a számított szög nagyobb 180°-nál, az $ABCO$ négyszög konkáv, O az ABC háromszögben van, így a kisebb AOC szög, AC-nek O-ból vett látószöge $360^\circ - (270^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta$, ismert, tehát O az AC-nek $90^\circ + \beta$ nyílású látószögkörívén van, AC-nek B-vel egyező oldalán. (A $\beta < 90^\circ$ tény fennállását láthatjuk abból, hogy k-nak K középpontja az ABC háromszögben van; k-val együtt természetesen K-t is adottnak tekinthetjük.) Ha β tompaszög (K kívül van az ABC háromszögön, a 2. ábrán ez az eset látható), akkor a fent számított szög tompaszög, ez adja AC-nek O-ból vett látószögét. Ha végül β derékszög (K rajta van az AC szakaszon), akkor O-t az ABC szög felezője kimetszi AC-ből, k^* tükrös AC-re, és így D a B-nek AC-re vett tükörképe. Ekkor $ABCD$ deltoid. Ezt az esetet tovább mellőzhetjük.

Keressük meg az i-t tartalmazó k_i kör Ω középpontját. Ez mindkét esetben AC-nek O-val ellentétes partján van, mert a $90^\circ + \beta$, ill. $270^\circ - \beta$ látószög tompaszög. Láttuk, hogy O az AC-nek mindig ugyanazon oldalán van, mint K, ezért AC mindig elválasztja Ω-t K-tól. k_i-nek az AOC szög szárai közti ívéhez Ω-ban 180°-nál nagyobb középponti szög tartozik, ezért a kisebb $A\Omega C$ szög

$$\beta < 90^\circ \quad \text{esetén} \quad 360^\circ - 2(90^\circ + \beta) = 180^\circ - 2\beta,$$
$$\beta > 90^\circ \quad \text{esetén} \quad 360^\circ - 2(270^\circ - \beta) = 2\beta - 180^\circ.$$

Ezért az első esetben $\Omega AC\sphericalangle = \Omega CA\sphericalangle = \beta$, tehát $A\Omega$ a k-hoz A-ban, $C\Omega$ pedig a C-ben húzott érintő. – Ugyanerre jutunk a második esetben is, mert

$$\Omega AC\sphericalangle = \Omega CA\sphericalangle = 180^\circ - \beta$$

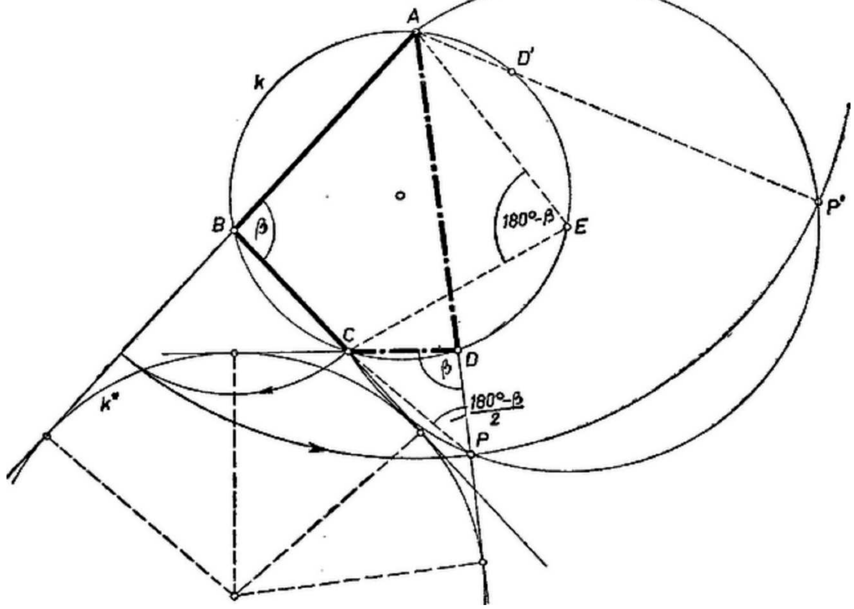
(hegyesszög, ekkor Ω azon az oldalán van AC-nek, mint B).

Mindezek alapján O-t a következő lépésekben kapjuk: meghúzzuk k érintőjét A-ban és C-ben, metszéspontjuk Ω; Ω körül $\Omega A = \Omega C$ sugárral megrajzoljuk a rövidebb $AC = i$ ívet; megszerkesztjük az ABC szög f felezőjét; i és f metszéspontja O.

A szerkesztés helyességének bizonyítását és diszkusszióját hely hiányában – az olvasóra bízzuk.

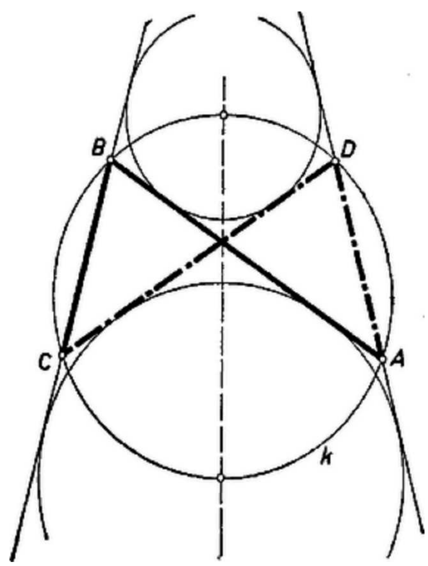
Szentai Judit (Budapest, Kanizsay D. lg. II. o. t.) dolgozata,
kiegészítve i megszerkesztésével.

Megyjegyzések. 1. Az érintőnégyszög oldalegyeneseit érintő kör eshet a négyszögön kívül is. Könnyen igazolható, hogy ilyenkor a négyszög valamelyik két szomszédos oldalának összege egyenlő a másik két oldal összegével. A 2. ábrán a négyszög negyedik csúcsa D' és $AB + AD' = CB + CD'$. Ezt $AB - BC = CD' - AD'$ alakban írva és (1)-nek $AB - BC = AD - CD$ alakjával összehasonlítva csak annyi a változás, hogy a jobb oldalon C és A felcserélődött. Eszerint D'-t D-nek AC felező merőlegesére való tükrözésével kapjuk ($\beta = 90^\circ$ esetén ilyen megoldás nincs).



3. ábra

Ajánljuk az olvasóknak, járják végig mindkét megoldás gondolatmenetét erre az esetre is (l. az ábrákat). Hasonlóan tárgyalható a 3. ábra esete is, amikor $AB+BC=AD+DC$.



4. ábra

2. Könnyen belátható, hogy ha D-t az AB-nek C-t nem tartalmazó partján úgy vesszük, hogy $AD=BC$ (4. ábra), akkor a hurkolt $ABCD$ szimmetrikus húrnégyszöghöz két olyan kör is van, mely mind a négy oldalegyenest érinti. (Ugyancsak két érintő kör van a fenti $\beta=90°$, deltoid esetében is.)

3. A dolgozatok alig tartalmaznak bizonyítást és diszkussziót. Ezt a tanév adott időszakában az I. osztályosok részéről természetesnek vettük, a II. és III. osztályosok részéről viszont hiánynak minősítettük. (Az 1. és 2. megjegyzésben említett lehetőségek mellőzését nem tekintjük hiánynak.)