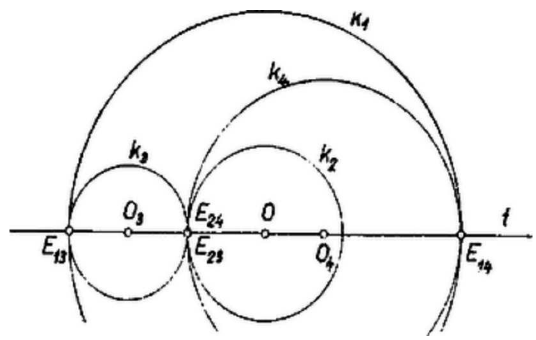
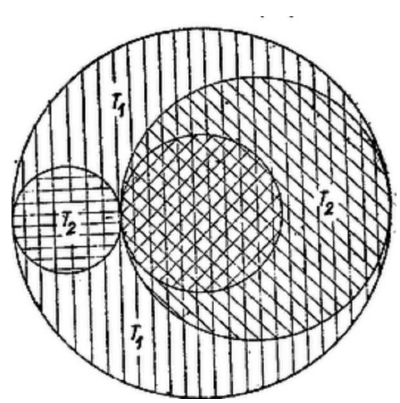
Legyenek a körök a fenti felsorolás rendjében k_1, k_2, k_3, k_4, középpontjaik rendre $O_1 \equiv O_2 \equiv O$, O_3, O_4, sugaraik rendre r_1, r_2, r_3, r_4. Feltehetjük, hogy $r_1 > r_2$. Így k_3 és k_4 csak a k_1 és k_2 közti körgyűrűben haladhatnak, k_1-et mindkettő belülről érinti. O_3 és O_4 egymástól és O-tól különböző pontok. Az $OO_3 = t$ egyenesen rajta van a k_1, k_3 körpár E_{13} érintkezési pontja, úgyszintén a k_2, k_3 pár E_{23} érintkezési pontja is. E két pont egymástól különböző, mert k_1-nek és k_2-nek nincs közös pontja. Ezért az érintkezési pontok közös egyenese csak az OO_3-mal azonos $E_{13}E_{23}$ egyenes lehet. Ezen van tehát a k_3, k_4 körpár E_{34} érintkezési pontja is, ennélfogva O_4 is, tehát t az egész ábra szimmetriatengelye.



1. ábra

k_3-nak t-n levő pontjai E_{13} és E_{23}, a k_4-gyel való érintkezése csak E_{23}-ban lehetséges, mert $E_{34} \equiv E_{13}$ esetén k_3 és k_4 belülről érintkeznének. Így E_{23} egyszersmind a k_2, k_4 körpárnak is érintkezési pontja. Mivel O_3 és O_4 az $E_{23} \equiv E_{34}$-nek két oldalán van, azért k_3 és k_4 egyike kívülről érinti k_2-t, másikuk pedig magában foglalja azt. (Nem lehet, hogy k_2 foglalja magában e körök egyikét, mert k_3-nak is, k_4-nek is van k_2-n kívüli pontja: a k_1-gyel való érintkezési pontjuk.) Válasszuk az indexezést úgy, hogy k_4 foglalja magában k_2-t. Végül k_1 és k_4 egymást a t-n levő, E_{13}-tól különböző E_{14} pontjukban érintik (1. ábra).



2. ábra

Ezek szerint a k_2, k_3, k_4 körök k_1 belsejét 5 részre osztják (2. ábra). Nincs olyan terület, melyet mind a 4 kör fedne, mert k_3-nak és k_4-nek nincs közös belső pontja. k_2 területét még k_1 is, k_4 is lefedi, ez 3-szor fedett terület, a bizonyításban figyelmen kívül marad. Kétszer fedett a k_3 egész területe, valamint k_4-nek k_2-n kívüli része, mert k_1-be is beletartoznak; így a 2-szer fedett területek összege

$$T_2 = r_3^2\pi + (r_4^2\pi - r_2^2\pi).$$

Egyszer van fedve k_1-nek a k_3-on és k_4-en kívüli része, ennek területe

$$T_1 = r_1^2\pi - r_3^2\pi - r_4^2\pi.$$

Képezzük T_1 és T_2 különbségét. Ha ezt 0-nak találjuk, az állítást bebizonyítottuk.

$$T_1 - T_2 = \pi\left[r_1^2 + r_2^2 - 2(r_3^2 + r_4^2)\right],$$

és mivel

$$r_3 = \frac{r_1 - r_2}{2}, \qquad r_4 = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

azért valóban

$$T_1 - T_2 = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{2r_1^2 + 2r_2^2}{2}\right) = 0.$$

Dankó István (Tokaj, Tokaji F. g. II. o. t.)