Legyen

$$\sqrt[n]{x+1}=u,\quad \sqrt[n]{x-1}=v;\quad \text{ekkor}\quad \sqrt[n]{x^2-1}=uv,$$

és osszuk az így átalakított egyenletet v^2-nel ($v=0$ csak $x=1$ mellett volna lehetséges, ez azonban nem gyöke az egyenletnek):

$$u^2+v^2=4uv;\qquad \left(\frac{u}{v}\right)^2-4\frac{u}{v}+1=0.$$

Innen, mindjárt visszahozva x kifejezéseit

$$\frac{u}{v}=\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}=2\pm\sqrt{3},\quad \text{végül}^1\quad x_{1,2}^{(n)}=\frac{(2\pm\sqrt{3})^n+1}{(2\pm\sqrt{3})^n-1}.$$

Képletünk $n=2,3$ és 4-re a következőket adja:

$$x^{(2)}=\frac{(2\pm\sqrt{3})^2+1}{(2\pm\sqrt{3})^2-1}=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{6\pm4\sqrt{3}}=\frac{(4\pm2\sqrt{3})(3\mp2\sqrt{3})}{(3\pm2\sqrt{3})(3\mp2\sqrt{3})}=\frac{\mp2\sqrt{3}}{9-12}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$x^{(3)}=\frac{(2\pm\sqrt{3})^3+1}{(2\pm\sqrt{3})^3-1}=\frac{27\pm15\sqrt{3}}{25\pm15\sqrt{3}}\cdot\frac{5\mp3\sqrt{3}}{5\mp3\sqrt{3}}=\frac{\mp6\sqrt{3}}{-10}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{5},$$

$$x^{(4)}=\frac{(7\pm4\sqrt{3})^2+1}{(7\pm4\sqrt{3})^2-1}=\frac{98\pm56\sqrt{3}}{96\pm56\sqrt{3}}\cdot\frac{12\mp7\sqrt{3}}{12\mp7\sqrt{3}}=\pm\frac{7}{4\sqrt{3}},$$

ill. tizedes alakú közelítő törtekkel:

$$x^{(2)}\approx\pm1{,}155,\quad x^{(3)}\approx\pm\ 1{,}039,\quad x^{(4)}\approx\pm1{,}010.$$

Leporisz Gyögy (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A két gyök mindig egymás negatívja, ugyanis

$$x_1^{(n)}=\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}=\frac{\left[(2+\sqrt{3})^n+1\right]\left[(2-\sqrt{3})^n-1\right]}{\left[(2+\sqrt{3})^n-1\right]\left[(2-\sqrt{3})^n-1\right]}=$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})^n-(2+\sqrt{3})^n}{2-\left[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right]}=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{\left[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right]-2},$$

$$x_2^{(n)}=\frac{\left[(2-\sqrt{3})^n+1\right]\left[(2+\sqrt{3})^n-1\right]}{\left[(2-\sqrt{3})^n-1\right]\left[(2+\sqrt{3})^n-1\right]}=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2-\left[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right]}=-x_1^{(n)}.$$

Ez abból is látható, hogy az u/v-re kapott egyenlet két gyöke egymás reciproka, és u/v-ben x helyett $-x$-et írva az a reciprokába megy át. ($x_1^{(n)}$ számlálója és nevezője pozitív.) Az is könnyen látható, hogy a hatványok kifejtésével a nevezőben csak egész tagok maradnak meg, a számlálóban megmaradó tagok pedig $\sqrt{3}$ egész többszörösei.

2. Az n-edik gyökök mindig valósak. Ugyanis a gyökjelek alatt (1) bal oldalán minden (valós) x mellett nem negatív szám áll, másrészt a talált gyökökkel mindig $|x_{1,2}|>1$, tehát a jobb oldali gyökjel alatti szám pozitív. Valóban

$$x_1^{(n)}=\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}=1+\frac{2}{(2+\sqrt{3})^n-1}>1,$$

és így $x_2^{(n)}=-x_1^{(n)}<-1$.

---

[1] A felső indexszel arra utalunk, hogy az n gyökkitevőtől függően különböző egyenletek gyökeiről van szó.