I. megoldás. Az első sorban tagról tagra mutatkozó növekedést x-szel jelölve ennek és az előre beírt számok közül háromnak a felhasználásával minden további mező számát kifejezhetjük. Ugyanis így az első sor első négy száma $17-4x$, $17-3x$, $17-2x$, $17-x$ lesz, tehát a növekedés az első oszlopban $\big[1-(17-4x)\big]/4=x-4$, a második oszlopban pedig $11-(17-3x)=3x-6$. Ezek alapján kifejezhetjük az első két oszlop számait, majd ezeknek ugyanabba a sorba eső két-két számából a további sorok növekedését, végül az összes hátralevő mezők számait:

$17-4x$	$17-3x$	$17-2x$	$17-x$	17
$13-3x$	11			
$9-2x$	$3x+5$	21		
$5-x$	$6x-1$			
1	$9x-7$			

				17
	11			
		21		
1				

Ezek után x-et abból számíthatjuk ki, hogy a még fel nem használt 21-es szám a hátralevő mezők egyikén áll.

$$(3x+5)+\big[(3x+5)-(9-2x)\big]=21,$$

amiből $x=2{,}5$. Mostmár a fentiek alapján ábránk így alakul:

7	9,5	12	14,5	17
5,5	11	16,5	22	27,5
4	12,5	21	29,5	38
2,5	14	25,5	37	48,5
1	15,5	30	44,5	59

ugyanis az első két oszlop növekedése $x-4=-1{,}5$, ill. $3x-6=1{,}5$, és a további sorok növekedése rendre 5,5, 8,5, 11,5, ill. 14,5. Látjuk, hogy a növekedés a 3–5. oszlopokban is mezőről mezőre ugyanaz, ti. 4,5, ill. 7,5, ill. 14,5.

Fiala István (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. I. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük az első sor első számát a-val, az első sor és az első oszlop tagról tagra való növekedését s_1-gyel, ill. o_1-gyel, végül d-vel azt a számot, amennyivel a második sor növekedése nagyobb s_1-nél. Ezek közt keresünk összefüggéseket a megadott számok felhasználásával.

A 2. sorbeli növekedés $s_2=s_1+d$, az első két sor első két-két száma a, $a+s_1$, ill. $a+o_1$, $a+o_1+s_1+d$, a 2. oszlopbeli növekedés

$$o_2=[(a+o_1)+(s_1+d)]-(a+s_1)=o_1+d,$$

tehát a táblázat első két sora és oszlopa:

a	$a+s_1$	$a+2s_1$	$a+3s_1$	$a+4s_1$
$a+o_1$	$a+o_1+s_1+d$	$a+o_1+2s_1+2d$	$a+o_1+3s_1+3d$	$a+o_1+4s_1+4d$
$a+2o_1$	$a+2o_1+s_1+2d$			
$a+3o_1$	$a+3o_1+s_1+3d$			
$a+4o_1$	$a+4o_1+s_1+4d$			

Ezek szerint a 3–5. sorok s_3, s_4, s_5 és a 3–5. oszlopok o_3, o_4, o_5 növekedései, az ott álló első két-két szám alapján

$$\begin{aligned}
s_3&=(a+2o_1+s_1+2d)-(a+2o_1)=s_1+2d,\\
s_4&=(a+3o_1+s_1+3d)-(a+3o_1)=s_1+3d,\\
s_5&=(a+4o_1+s_1+4d)-(a+4o_1)=s_1+4d,\\
o_3&=(a+o_1+2s_1+2d)-(a+2s_1)=o_1+2d,\\
o_4&=(a+o_1+3s_1+3d)-(a+3s_1)=o_1+3d,\\
o_5&=(a+o_1+4s_1+4d)-(a+4s_1)=o_1+4d,
\end{aligned}$$

vagyis bármelyik sor és bármelyik oszlop növekedési számát előre kiszámíthatjuk úgy, hogy d-t megszorozzuk a sor, ill. az oszlop sorszámánál 1-gyel kisebb számmal és ehhez hozzáadjuk az 1. sorbeli, ill. 1. oszlopbeli növekedési számot.

Ennek alapján megmutatjuk, hogy ha a hátralevő mezőket pl. a sorok szerinti tagról tagra ugyanannyival való növekedés követelménye alapján töltjük ki, akkor a beírt számok egyszersmind az oszlopok szerint tagról tagra ugyanannyival való növekedés követelményének is eleget tesznek. Ha ugyanis i és k egymástól függetlenül a 3, 4, 5 számok bármelyikét jelenti, akkor az i-ik sor k-ik száma – az ezen sor első számából a növekedési szám $k-1$-szeresének hozzáadásával –

(1)
$$\big[a+(i-1)o_1\big]-(k-1)\big[s_1+(i-1)d\big].$$

Ez így alakítható:

$$\big[a+(k-1)s_1\big]+(i-1)\big[o_1+(k-1)d\big].$$

És éppen ezt a számot írnók a k-ik oszlop i-ik mezejére, ha a hátralevő mezőket az oszlopokban tagról tagra ugyanannyival való növekedés követelménye alapján töltenénk ki, ugyanis az első szögletes zárójelben a k-ik oszlop első száma áll, a második szögletes zárójelben pedig a k-ik oszlop növekedése. – Könnyen belátható, hogy az (1) képlet az első két sor és az első két oszlop számait is megadja.

Ezek alapján a, s_1, o_1 és d értékét abból az egyenletrendszerből számíthatjuk ki, amelyet (1)-ből kapunk, ha i és k helyére rendre egy-egy az ábrába előre beírt szám sorának, ill. oszlopának sorszámát téve a kifejezést egyenlővé tesszük a beírt számmal

(2)	$i=1$ és $k=5$-tel	$a+4s_1=17,$
(3)	$i=2$ és $k=2$-vel	$a+\ \ s_1+\ \ o_1+d=11,$
(4)	$i=3$ és $k=3$-mal	$a+2s_1+2o_1+4d=21,$
(5)	$i=5$ és $k=1$-gyel	$a+4o_1=1.$

(2)-ből s_1 és (5)-ből o_1 kifejezését (4)-be helyettesítve a is kiesik és $d=3$ adódik. Hasonlóan (3)-ból $a+2d=13$, így $a=7$, és tovább $s_1=2{,}5$, $o_1=-1{,}5$, megegyezésben a fenti eredménnyel.

Megjegyzések. 1. A fentiekből azt is látjuk, hogy 5 soros, 5 oszlopos táblázat helyett akárhány sort és akárhány oszlopot tartalmazó hasonló ábra teljes kitöltéséhez elegendő négy szám megadása, hacsak azok négy független egyenletre vezetnek. A 727. gyakorlat megoldásához többen tévesen megjegyezték, hogy a sorok és oszlopok számát növelve az előre beírt számok számát is növelni kell. – Érkezett olyan megjegyzés is, hogy a táblázat növelhető, de csak négyzet alakban – nyilván ez is téves.

2. Több dolgozat szerint a feladat nem oldható meg. Ezek hallgatólag számon csak természetes számot értettek, de néha ki is mondták ezt. A feladat ilyen korlátozást nem tartalmazott. A negatív számok bevezetése után a csökkenést negatív számmal való növekedésnek is mondhatjuk, ezért a fenti eredményt azon a címen sem lehet elvetni, hogy az első oszlop számai nem növekszenek.

3. Mind a 727., mind az ezen gyakorlatra érkezett dolgozatokban gyakran olvasható ilyesmi: „14-es számjegy", „21-es számjegy". Vigyázzunk a pontos fogalmazásra és ne keverjük össze a rokon fogalmakat.