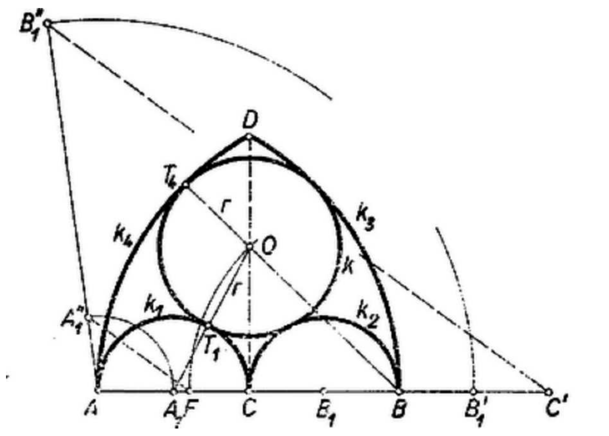
I. megoldás. A keresett k kör O középpontja a CD szakaszon van, mert k az egyenlő sugarú $AC=k_1$ és $CB=k_2$ félköröket kívülről érinti, az egyenlő sugarú $BD=k_3$ és $AD=k_4$ köríveket pedig belülről, ezért O egyenlő távolságra van egyrészt az AC és CB átmérők A_1, ill. B_1 felezőpontjától, másrészt A-tól és B-től, márpedig az A_1B_1 és AB szakaszok felező merőlegese közös: a CD egyenes. Ez egyszersmind az ívnégyszög szimmetriatengelye, ezért O közelebbi meghatározásában elég azt biztosítani, hogy k a félkörök egyikét és k_3, k_4 egyikét érintse, ebből már következik, hogy mind a négy ívet érinti.



1. ábra

Érintse k a k_1-et T_1-ben, k_4-et T_4-ben, jelöljük sugarát r-rel és vegyük hosszegységnek az AA_1 szakaszt (1. ábra). Ekkor $OA_1=OT_1+T_1A_1=r+1$, $OB=BT_4-OT_4=4-r$. OC-t az OA_1C és OBC derékszögű háromszögekből kétféleképpen kifejezve egyismeretlenes egyenletet kapunk r-re:

$$OC^2=(r+1)^2-1^2=(4-r)^2-2^2,$$

és ebből $r=6/5$.

Ezt a szakaszt többféleképpen is megszerkeszthetjük arányos osztással. Célszerű felhasználni, hogy az AB szakasz fel van osztva 4 egyenlő részre. Legyen ezért C és B_1 tükörképe B-re C', ill. B_1', így $AC'=6$ és $AB_1'=5$; mérjük rá az AA_1-et és AB_1'-et A-tól egy tetszés szerinti félegyenesre, legyen a végpont A_1'', ill. B_1'', végül messük az AB egyenest az A_1''-n átmenő $B_1''C'$-vel párhuzamos egyenessel F-ben. Ekkor $AF=6/5=r$. Másrészt $BF=4-r=BO$, tehát O-t a B körül BF sugárral írt körrel metszhetjük ki CD-ből.

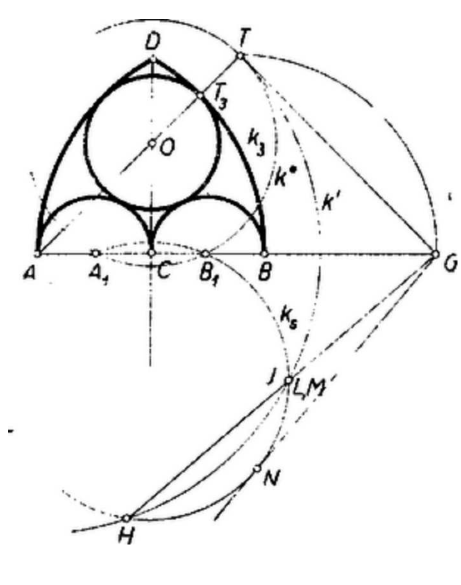
k valóban érinti k_4-et, mert $BO+r=BF+FA=BA$, a k_4 sugara, továbbá k_1-et is, mert

$$OA_1^2=OC^2+CA_1^2=BO^2-BC^2+CA_1^2=(14/5)^2-4+1=121/25.$$

$OA_1=11/5$ és ez egyenlő k és k_1 sugarának összegével. – Csak egy megfelelő kör szerkeszthető.

Pásztor György (Szeged, Petőfi-telepi I. sz. ált. isk. VII. o. t.)

II. megoldás. A körzsugorítás módszerére gondolva tekintsük azt a k-val koncentrikus k^* kört, amely átmegy A_1-en és B_1-en (2. ábra). Ennek sugara $r+AA_1$, így érinti az A körül $AB+AA_1$ sugárral írt k' kört. Eszerint O-t úgy is kereshetjük, mint az A_1 és B_1-en átmenő és k'-t érintő kör középpontját. Legyen az érintési pont T, és k^* és k' közös érintőjének A_1B_1-gye1 való metszéspontja G.



2. ábra

G-t az alábbiak szerint meghatározhatjuk. Tekintsünk egy olyan k_s segédkört, mely átmegy A_1, B_1-en és metszi k'-t, egyik közös pontjuk H. Messe másodszor a GH egyenes k'-t L-ben, k_s-t M-ben. Megmutatjuk, hogy L és M egybeesnek, és így azonosak k' és k_s második közös pontjával, J-vel. Alkalmazzuk a körhöz külső ponton át húzott szelőre és érintőre ismert tételt először k^*-ra és G-re

$$GT^2 = GA_1 \cdot GB_1,$$

majd k'-re és G-re

$$GL \cdot GH = GT^2,$$

végül k_s-nek G-ből húzott két szelőjére, a G-ből húzott GN érintő közbeiktatásával

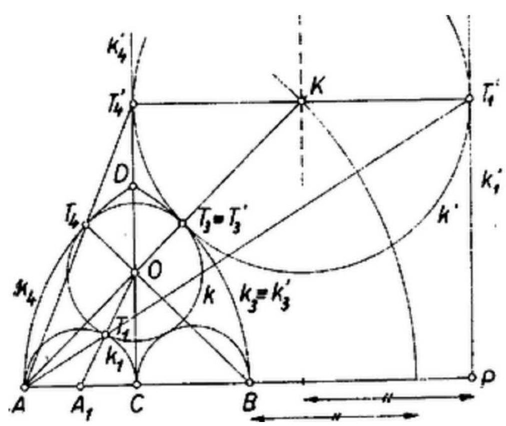
$$GA_1 \cdot GB_1 = GN^2 = GM \cdot GH.$$

Ezek alapján $GL \cdot GH = GM \cdot GH$, amiből $GL = GM$, és ez állításunkat igazolja.

Eszerint G-t a k' és k_s metszéspontjait összekötő HJ egyenes metszi ki AB-ből, folytatólag T-t a GA átmérő fölötti Thalész-körrel metszhetjük ki k'-ből, O-t pedig az AT egyenessel CD-ből.

Gerencsér László (Budapest, II. Rákóczi F. g. II. o. t.)

III. megoldás. Alkalmazzuk az inverzió módszerét,[1] A-val mint pólussal és AB^2 hatvánnyal. Ekkor k_1 inverz képe az a k_1' AB-re merőleges félegyenes, melynek kezdőpontja A-nak B-re való P tükörképe, és AB-nek ugyanazon a partján van, mint k_1; k_3 képe önmaga ($k_3' \equiv k_3$), k_4-é pedig a CD szakasz D-n túli k_4' meghosszabbítása. A keresett k kör nem mehet át a póluson, ezért képe: k', kör lesz, és mivel érintkező alakzatok inverz képei is érintkeznek, k'-nek érintenie kell a k_1', k_4' párhuzamos félegyeneseket és k_3-at.

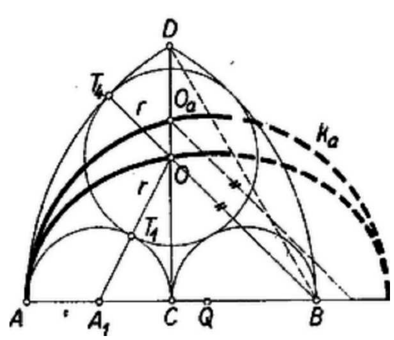


3. ábra

Eszerint k' átmérője egyenlő a $CP(= 3AB/2)$ szakasszal, K középpontja a CP szakasz felező merőlegesén van, A-tól $AK = AB + CP/2 = 7AB/4$ távolságban.

k'-ből k-t esetünkben egyszerűen kaphatjuk, mert elég k-nak k_3-mal való T_3 érintkezési pontját megszerkeszteni, ez pedig azonos inverz képével, T_3'-vel, k_3' és k' érintkezési pontjával. Innen látjuk, hogy T_3-at az AK egyenes metszi ki k_3-ból, s egyszersmind O-t is CD-ből. Eszerint ha csak az eredményre törekszünk, k' megrajzolását mellőzhetjük. (Egyébként az I. megoldásban szereplő T_1, T_4 érintkezési pontok inverz képei nyilván K-nak k_1'-n, ill. k_4'-n levő vetületében vannak, ahol k' ezeket a képeket érinti, tehát T_1 és T_4 az AT_1', ill. AT_4' egyenessel kimetszhető k_1-ből, ill. k_4-ből.

Szabó Mihály (Makó, József A. g. I. o. t.)



4. ábra

[1] Ismertetését lásd pl. *Faragó László-Forgó Péterné: Geometriai szerkesztések*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954. Középiskolai Szakköri Füzetek.

IV. megoldás. (Vázlat.) Ha csak azt követeljük, hogy k érintse k_1-et (kívülről) és k_4-et (belülről), akkor $A_1O + OB = A_1A + r + BA - r = 5AB/4$, állandó. Ezért O csak azon az ellipszisen lehet, melynek fókuszai A_1 és B, nagy tengelyének fele $a = 5AB/8$, középpontja az A_1B szakasz Q felezőpontja, lineáris excentricitása $c = A_1B/2 = 3AB/8$, és így kis tengelyének fele $b = \sqrt{a^2 - c^2} = AB/2$. (Nem foglalkozunk azzal, hogy ezen ellipszisnek mely pontjai jönnek szóba O gyanánt.) Ez az ellipszis affin képe a Q középpont körül a sugárral irt körnek abban a merőleges affinitásban,[2] melynek tengelye az AB egyenes és aránya $b/a = 4/5$. Ez a k_a kör megszerkeszthető.

Visszatérve feladatunkra, ezen ellipszisnek csak a CD félegyenesen levő pontját keressük, ez lesz O. Mivel pedig a CD egyenes a fenti affinitásban önmagának a képe (nem pontonként értve!), azért O-nak a körrendszerbeli megfelelője a k_a-nak CD-vel való O_a metszéspontja, O-t pedig a $CO = 4 \cdot CO_a/5$ összefüggésből egyszerűen megszerkeszthetjük.

Mészáros György (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

[2]Lásd pl. *Lőrincz Pál: Ábrázoló geometria*, Tankönyv a gimnáziumok IV. osztálya számára 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1959. 20. és 40. o.