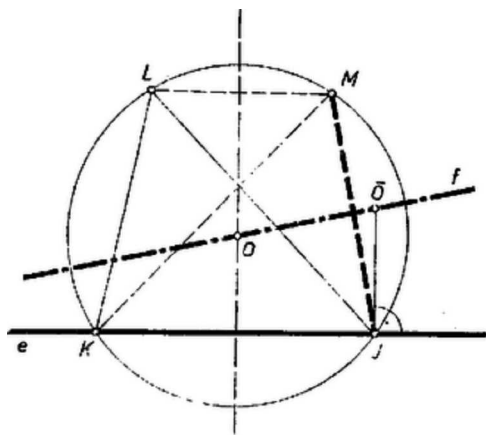


I. megoldás. Tükrözzük a JKL háromszöget a JK oldal felező merőlegesére, legyen L tükörképe M (1. ábra). A JM szakasz húrja a JKL háromszög k körülírt körének, mert a tükrözés tengelye ennek a körnek szimmetriatengelye. Másrészt a JM szakasz ugyanaz a szakasz a K pont minden helyzeténél, mert J kezdőpontja és $JM = KL$ hossza állandó, továbbá, ha az e egyenesnek irányítást adunk, nem változik a KL szakasznak ezzel az irányítással bezárt szöge, így a JM szakasznak ezzel az iránnyal bezárt szöge, ami az előbbi szög kiegészítő szöge, szintén nem változik. Így JM közös húrja az összes szóba jövő köröknek, tehát f felező merőlegesé átmege a körök középpontjain.



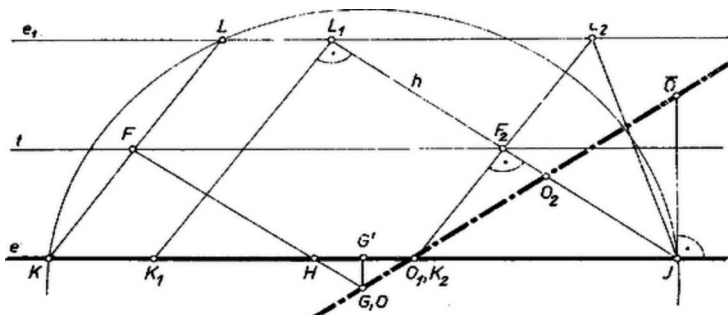
1. ábra

Legyen mármost f -nek egy tetszés szerinti pontja O^* és az O^* körül O^*J sugárral írt k^* kör második metszéspontja e -vel K^* , feltéve, hogy k^* nem érinti e -t. Legyen a K^*JM háromszög tükörképe K^*J felező merőlegesére JK^*L^* , akkor az előző megfontolás megfordításával adódik, hogy K^*L^* hossza és iránya a KL számára megadott távolság és irány, és a háromszög körülírt köre k . Így O^* pontja a mértani helynek.

Akkor kapunk e -t érintő kört, ha középpontnak az e -re J -ben állított merőlegesnek f -vel való O metszéspontját választjuk. Ekkor a K^*MJ háromszög elfajul a JM egyenesszakasszá, s így JK^*L^* is egyenesszakasszá fajul. Tehát a mértani hely az f egyenes, az O pont kivételével.

Hírka András (Pannonhalma, Benedekrendi gimn. II. o. t.)

II. megoldás. Ha KL nem merőleges e -re, akkor válasszuk ki a szakasz két különleges helyzetét: 1. amikor a JKL háromszög L -nél derékszögű, ill. 2. amikor a háromszög egyenlő szárú: $JL = JK$ (2. ábra). Csak egy-egy ilyen helyzet van, mindkettőt kitűzhetjük a J -ből KL irányára állított h merőlegessel. Arra az L_1 pontra, amelyben L -nek e_1 pályáját metszi h , $L_1K_1 \perp JL_1$; ahol pedig a KL szakasz F felezőpontjának pályáját metszi, vagyis az e, e_1 síksáv t szimmetriatengelyét, ott van a második helyzethez tartozó F_2 , erre $F_2K_2 \perp JF_2$. Legyenek a megfelelő körközpontok O_1 és O_2 . O_1 azonos K_2 -vel, mert F_2K_2 merőlegesen felezi a JL_1 befogót, így felezi a JK_1 átfogót is, és ez a felezőpont egyben a derékszögű háromszög köré írt kör középpontja. Másrészt O_2 a h -n van. Megmutatjuk, hogy a mozgó szakasz tetszés szerinti KL helyzetéhez tartozó O középpont rajta van az O_1O_2 egyenesen.



2. ábra

Messe a KL -re, ennek F felezőpontjában állított merőleges O_1O_2 -t G -ben, e -t H -ban. Elegendő azt belátni, hogy G rajta van JK felező merőlegesén is. A GHO_1 szög vagy azonos az FHK szöggel, vagy annak csúcshöge, ezért egyenlő az utóbbival egyállású F_2JK_2 szöggel. Viszont az O_2JK_2 háromszög egyenlő szárú, így $F_2JK_2 \sphericalangle = O_2JK_2 \sphericalangle = O_2K_2J \sphericalangle = O_2O_1J \sphericalangle$. Végül az O_2O_1J szög azonos a GO_1H szöggel, vagy annak csúcshöge, így $GHO_1 \sphericalangle = GO_1J \sphericalangle = GO_1H \sphericalangle$, és a GHO_1 háromszög egyenlő szárú. Ezért, G -nek e -n levő vetületét G' -vel jelölve HG' és O_1G' egyenlő és ellentétes irányú szakaszok. – Másrészt a KFH háromszög eltolással áll elő K_2F_2J -ből, ezért HK és $K_2J = O_1J$ is egyenlő és ellentétes irányú szakaszok, ennél fogva ugyanez áll a KG' és JG' szakaszpárra. Ez pedig azt jelenti, hogy G rajta van KJ felező merőlegesén is, KL -én is, vagyis G azonos a JKL háromszög köré írt kör O középpontjával. Ezt akartuk bizonyítani.

Azt, hogy az O_1O_2 egyenes mely pontjai alkotják a mértani helyet, az I. megoldásban láttuk.

Ha KL merőleges e -re, akkor a JKL háromszög K -nál derékszögű, és O a JL átfogó felezőpontjában van. Másrészt L egy az e -vel párhuzamos e_1 egyenest ír le, tehát a mértani hely az e , e_1 egyenespárral határolt síksáv t szimmetriatengelye, kivéve J -nek t -re vett \overline{O} vetületét. Ebben az esetben \overline{O} is elfogadható, ha a JL szakasszá elfajult JKL háromszög körülírt körének azt a legkisebb sugarú kört tekintjük, amely átmegy J -n és L -en.

Radó Iván (Budapest, I. István g. I. o. t.)