I. megoldás. Minden tényező két négyzet különbsége, és így két további tényező szorzatára bontható. Vegyük ki minden tényezőből az alapok különbségét és tekintsük ezek szorzatát:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Hasonlóan az alapok összegeinek szorzatára

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

Ennélfogva

$$K=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}.$$

Páratlan n esetén ez még 2-vel egyszerűsíthető, páros n-re viszont már nem egyszerűsíthető, mert n és $n-1$ szomszédos természetes számok és így relatív primek.

Hoffer Anna (Budapest, Hámán K. lg. I. o. t.)

II. megoldás. Kipróbálva n első néhány értékét, könnyen észrevehetjük, hogy ezekre a következő összefüggés érvényes:

$$K=K_n=\frac{n+1}{2n}.$$

A teljes indukció módszerével bebizonyítjuk, hogy ez minden további n-re is érvényes. Valóban, ha n-re helyes az összefüggés, akkor

$$K_{n+1}=K_n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1^2}{(n+1)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)n(n+2)}{2n(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)},$$

vagyis a sejtett szabályszerűség n-ről átöröklődik a következő természetes számra. Így, mivel a szabályszerűség $n=2$ esetében érvényes, minden a 2-nél nagyobb természetes számra is érvényes.

Szidarovszky Klára (Budapest, Ságvári E. lg. I. o. t.)

Megjegyzés. Tulajdonképpen az I. megoldásban is teljes indukciót alkalmaztunk, de a bizonyítást mellőzhettük, a két rész-sorozatban annyira nyilvánvaló volt az egyszerűsítés lehetősége és eredménye.