A $c=-d=e=f=1$ esetben képletünk így alakul:

$$a_{k+1}=\frac{a_k-1}{a_k+1}. \tag{1a}$$

$k=1,2,3$ és 4-re

$$a_2=\frac{a_1-1}{a_1+1},\quad a_3=\frac{a_2-1}{a_2+1}=\frac{\dfrac{a_1-1}{a_1+1}-1}{\dfrac{a_1-1}{a_1+1}+1}=-\frac{1}{a_1},$$

$$a_4=\frac{a_3-1}{a_3+1}=\frac{-\dfrac{1}{a_1}-1}{-\dfrac{1}{a_1}+1}=-\frac{a_1+1}{a_1-1}\quad \text{és}$$

$$a_5=\frac{a_4-1}{a_4+1}=\frac{-\dfrac{a_1+1}{a_1-1}-1}{-\dfrac{a_1+1}{a_1-1}+1}=a_1.$$

Eszerint az 5. tag egyenlő az elsővel. És mivel képletünk szerint minden tag csak a megelőzőtől függ, azért $a_6=a_2$, $a_7=a_3$, $a_8=a_4$, $a_9=a_5=a_1$ és így tovább, tehát a sorozat tagjai négyesével periodikusan ismétlődnek.

Nem választhatjuk a_1-et úgy, hogy a_2, a_3, vagy a_4 nevezője 0 legyen, tehát $a\neq -1,\ 0,\ +1$; minden más értékkel számsorozatunknak akárhány tagja képezhető.

A továbbiakban olyan c, d, e, f értékrendszert keresünk, amellyel a sorozatnak csak 3 különböző tagja van. Ezek csak a_1, a_2, a_3 lehetnek, azt kell elérnünk, hogy $a_4=a_1$ legyen, mert így a fentiek szerint az $a_5=a_2$, $a_6=a_3$, $a_7=a_4=a_1,\ldots$ egyenlőségek is biztosítva vannak. Az (1) képlettel

$$a_2=\frac{ca_1+d}{ea_1+f},$$

$$a_3=\frac{c\dfrac{ca_1+d}{ea_1+f}+d}{e\dfrac{ca_1+d}{ea_1+f}+f}=\frac{(c^2+de)a_1+d(c+f)}{e(c+f)a_1+(de+f^2)}.$$

Vezessük be átmenetileg a következő jelöléseket:

$$c^2+de=C,\quad d(c+f)=D,\quad e(c+f)=E,\quad de+f^2=F.$$

Így számításainkat egyszerűbben folytathatjuk:

$$a_3=\frac{Ca_1+D}{Ea_1+F}\quad \text{és}$$

$$a_4=\frac{c\dfrac{Ca_1+D}{Ea_1+F}+d}{e\dfrac{Ca_1+D}{Ea_1+F}+f}=\frac{(cC+dE)a_1+(cD+dF)}{(eC+fE)a_1+(eD+fF)}.$$

Tetszés szerint választott a_1 mellett $a_4=a_1$ biztosan fennáll, ha az utolsó alak nevezőjében nem lép fel a_1, a számlálóban nem lép fel a_1-től mentes tag, végül a_1-nek a számlálóbeli együtthatója egyenlő a nevezőbeli második taggal, azaz ha

$$eC+fE=0,\quad cD+dF=0,\quad cC+dE=eD+fF. \tag{2}$$

Itt mindent az eredeti együtthatókkal kifejezve, 0-ra redukálva és észrevéve, hogy $dE=eD$:

$$e(c^2+de)+ef(c+f)=e(c^2+cf+de+f^2)=0, \tag{3}$$

$$cd(c+f)+d(de+f^2)=d(c^2+cf+de+f^2)=0, \tag{4}$$

$$cC-fF=0,\quad \text{azaz}\quad c^3+cde-def-f^3=0,$$

illetőleg kiemeléssel

$$(c-f)(c^2+cf+f^2+de)=0. \tag{5}$$

A (3)–(5) követelmények nyilvánvalóan teljesülnek, ha egyidejűleg $d=0$, $e=0$ és $c-f=0$, azaz $c=f$. Ekkor azonban, ha még $c\neq 0$ is áll, (1) szerint $a_{k+1}=a_k$, a sorozat minden tagja egyenlő. Ezt az érdektelen esetet mellőzhetjük. Ha a d, e, $c-f$ tényezők közt van 0-tól különböző, akkor (3), (4), (5) mindegyike csak úgy állhat fenn, ha

$$c^2+cf+f^2+de=0, \tag{6}$$

és ekkor valóban mindegyik teljesül. Itt c, d, e, f közül bármelyik hármat tetszés szerint megválasztva a negyediket kiszámíthatjuk.

Pl. I. $c=d=f=1$-gyel $e=-3$;
II. $c=e=f=1$-gyel $d=-3$;
III. IV. $d=-1$, $e=4$, $f=2$-vel $c_1=0$ $c_2=-2$.

Az I – III. példákban a sorozat első három tagja

$$\begin{array}{llll} a_1, & \dfrac{a_1+1}{1-3a_1}, & \dfrac{a_1-1}{3a_1+1}, & (\text{és } a_4=a_1); \\ b_1, & \dfrac{b_1-3}{b_1+1}, & \dfrac{b_1+3}{1-b_1}, & (\text{és } b_4=b_1); \\ g_1, & \dfrac{-1}{4g_1+2}, & -\dfrac{2g_1+1}{4g_1}, & (\text{és } g_4=g_1), \end{array}$$

általában különböző, a IV-ben azonban

$$a_{k+1}=\frac{-2a_k-1}{4a_k+2}=-\frac{1}{2}$$

-re jutunk, vagyis a sorozat tagjainak értéke a_2-től kezdve állandó, függetlenül a_1-től.

Lőrincz Csaba (Orosháza, Táncsics M. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egyszerű feltételt kapunk az együtthatók között azt keresve, mikor áll be a IV. példában látott eset, mikor válik állandóvá a sorozat. Alakítsuk (1)-et így:

$$a_{k+1}=\frac{ca_k+d}{ea_k+f}=\frac{\frac{c}{e}(ea_k+f)-\frac{cf}{e}+d}{ea_k+f}=\frac{c}{e}+\frac{de-cf}{e(ea_k+f)},$$

tehát a sorozat az első tagtól függetlenül c/e-vel egyenlő a második tagtól kezdve, ha $de-cf=0$. A IV. példában ilyen értékrendszert találtunk.

2. Az (1a) felhasználásával általában

$$a_{k+2}=\frac{a_{k+1}-1}{a_{k+1}+1}=-\frac{1}{a_k},\quad \text{és így}\quad a_{k+4}=-\frac{1}{a_{k+2}}=a_k.$$