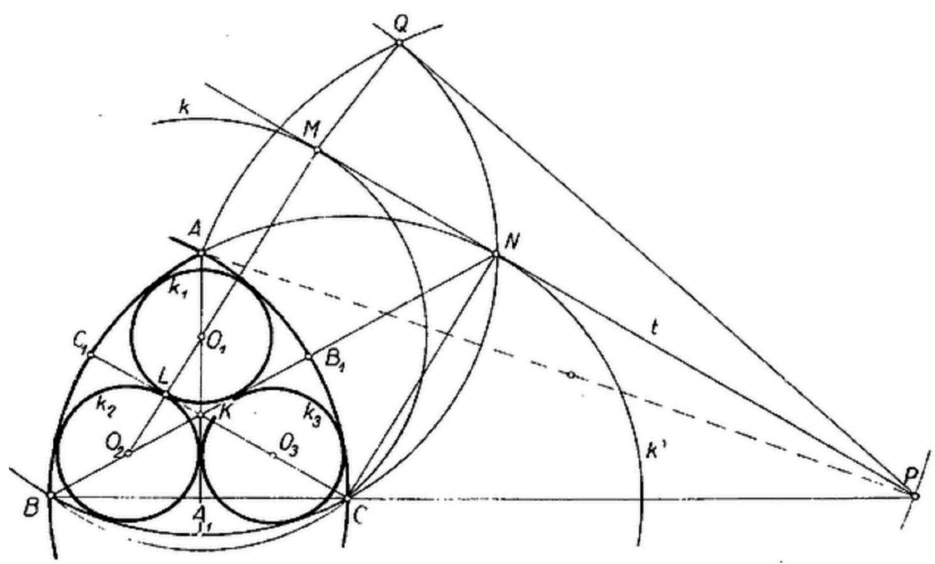
I. megoldás. Nyilvánvaló, hogy a szerkesztendő k_1, k_2, k_3 mindegyike az ívháromszög más két-két oldalát érinti. Középpontjuk: O_1, O_2, O_3 rendre az ABC háromszög BC, CA, ill. AB oldalának felező merőlegesén van, ugyanis pl. $BO_1 = d - r = CO_1$ ahol r a k_1 sugara.

Legyen az ABC háromszög középpontja K és messék az AK, BK, CK szimmetriatengelyek a BC, CA, AB ívet A_1-ben, B_1-ben, ill. C_1-ben. A KB_1AC_1, KC_1BA_1, KA_1CB_1 idomok egybevágók, mert egymásba átvihetők a tengelyeken való tükrözéssel. Kézenfekvő feltenni, hogy van olyan megoldás, melyben a keresett körök sorra e három idomba vannak beleírva, ezért sugaraik egyenlők, és így egymást páronként a KC_1, KA_1, ill. KB_1 szakaszon érintik; ezzel a többletkövetelménnyel fogunk megoldást keresni. (Kiegészítésül megmutatjuk majd, hogy más megoldás nincs, ha k_1, k_2, k_3 kívülről érintik egymást.)



1. ábra

Legyen k_1 és k_2 érintkezési pontja L, tekintsük az O_1 körül $O_1B = d - r$ sugarú k kört, és legyen ennek L-től távolabbi metszéspontja az O_1O_2 egyenessel M. Így $LM = d$ és $LM \perp CC_1$, mert k_1 és k_2 sugarainak egyenlőségéből $KO_2 = KO_1$, és így $O_1O_2 \perp CC_1$. Ha tehát vesszük az AB ívet tartalmazó k' körnek CC_1-gyel párhuzamos, A-hoz közelebbi t érintőjét és érintési pontját N-nel jelöljük, akkor az $NCLM$ négyszög téglalap, és t a k-t is érinti M-ben. Ezért, a BC egyenes és t metszéspontját P-vel jelölve $PB \cdot PC = PM^2$. Ennek alapján M a t-n kijelölhető, és az M-en át CC_1-re állított merőleges kimetszi KA-ból O_1-et, KB-ből O_2-t, O_3-at pedig O_1-nek BB_1-re való tükrözésével kapjuk.

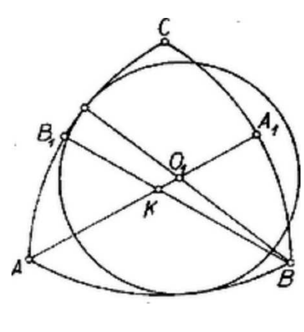
A PM szakasz hosszát megadja pl. a P-ből az ívháromszög BC oldalát tartalmazó körhöz szerkesztett érintő PQ hossza. (Jobb áttekinthetőség érdekében az ábrán a hosszabb BC ív érintője látható.) E szerkesztés végrehajtása mutatja, hogy van a többletkövetelményt is kielégítő megoldás.

Doskar Balázs (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

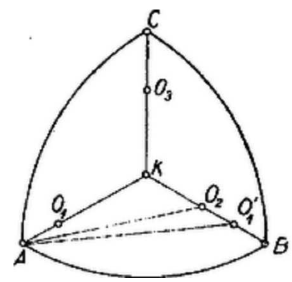
Megjegyzések. 1. t-nek második olyan M_2 pontjából, amelyre $PM_2^2 = PQ^2 = PB \cdot PC$, a fent leírt módon olyan három egyenlő sugarú, egymást páronként érintő kört kaphatunk, amelyek az A, B, C körül d sugárral írt körök közül (rendre más-más) kettőt kívülről érintenek.

2. Megmutatjuk, hogy a megszerkesztett körhármason kívül a feladatnak nincs más megoldása, ha csak egymást kívülről érintő köröket engedünk meg. Nem lehet, hogy mindhárom kör az ívháromszögnek ugyanazt a két oldalát érintse, mert ha az r_1, r_2, r_3 sugarú körök egymást páronként kívülről érintik, akkor középpontjaik távolságai: $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$, $r_3 + r_1$ eleget tesznek a háromszög egyenlőtlenségnek, tehát a középpontok háromszöget alkotnak, holott egy egyenesen kellene lenniök, a két kiszemelt ív szimmetriatengelyén.

Nem lehet pl. az AB és AC oldalakat érintő k_1 kör O_1 középpontja a KA_1 szakaszon, mert így sugarára $r_1 = d - BO_1 > d - BK = B_1K = KA_1 > O_1A_1$ tehát A_1 a k_1 belsejében van, a k_2-t és k_3-at magukba foglaló ívháromszögeknek (2. ábra, egy-egy csúcsuk B, ill. C) nincs közös pontjuk, k_2 és k_3 nem érintkezhetnek.



2. ábra



3. ábra

Tegyük fel mármost, hogy k_1, k_2, k_3 megoldást adnak, O_1, O_2, O_3 rendre a KA, KB, KC szakaszon van, és $KO_1 > KO_2$ (3. ábra). Ekkor O_1-nek CK-ra vett O_1' tükörképe a KO_2 szakasz O_2-n túli meghosszabbításán van. A KO_2A szög hegyesszög, mert $AKO_2\sphericalangle = 120°$. Ezért az $O_1'O_2A$ háromszögben O_2-nél tompaszög van, tehát $AO_1' > AO_2$, és így k_1 és k_2 sugarára

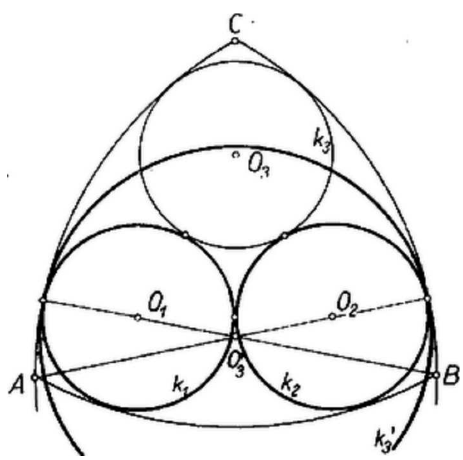
$$r_1 = d - BO_1 = d - AO_1' < d - AO_2 = r_2. \tag{1}$$

Másrészt hasonlóan $O_3O_2 < O_3O_1' = O_3O_1$, azaz ($k_3$ sugarát r_3-mal jelölve)

$$r_3 + r_2 < r_3 + r_1, \quad \text{amiből} \quad r_2 < r_1,$$

ellentétben (1)-gyel. Ugyanígy $KO_1 < KO_2$ is ellentmondásra vezet, tehát $KO_1 = KO_2$, és $r_1 = r_2$. Ezt akartuk bebizonyítani.

3. A szerkesztendő körök között belső érintkezést is megengedve a fenti megoldásból leszármaztathatunk olyan három egymást páronként érintő kört, melyek mindegyike belülről érinti az ívháromszög más két-két oldalát, azonban e körök egyike részben kívül van az ív háromszögön: k_1-et és k_2-t meghagyva vegyük k_3' középpontjának az AO_2 és BO_1 egyenesek O_3' metszéspontját (4. ábra).



4. ábra

A megoldók nagy része az érintő körök sugarának kiszámításán keresztül adott meg szerkesztési eljárást. Egy ilyen megoldás a következő:

II. megoldás. Az I. megoldás többletkövetelményét fenntartva kiszámítjuk a három kör közös r sugarát. Az O_1CL derékszögű háromszögben $O_1L = r$, $O_1C = d - r$ és $CL = CK + KL$ (1. ábra). Itt CK az ABC háromszög $d\sqrt{3}/2$ súlyvonalának $2/3$ része: $d/\sqrt{3}$, KL pedig egyenlő az r magasságú szabályos háromszög oldalának felével, $r/\sqrt{3}$-mal, mert $O_1KL\sphericalangle = 60°$. Így Pythagorász tételével

$$(d-r)^2 = r^2 + \left(\frac{d+r}{\sqrt{3}}\right)^2, \qquad r^2 + 8dr - 2d^2 = 0,$$

és ennek pozitív gyöke:

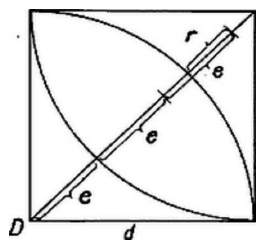
$$r = d(3\sqrt{2} - 4). \tag{2}$$

r megszerkeszthető, ebből $d - r$ is, és ekkor a B és C körül $d - r$ sugárral írt köröknek az ívháromszögben levő metszéspontja O_1. O_2-t és O_3-at megfelelő tükrözéssel kapjuk.

r szerkesztésére egy lehetőség: d oldalú négyzet átlójának 3-szorosából kivonjuk az oldal 4-szeresét.

Eredményünk helyességének bizonyításául csak azt kell megmutatnunk, hogy a (2) érték mellett az O_1CL háromszög oldalaira felhasznált kifejezések pozitívok. $r > 0$, mert $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > 4$, így $d + r > 0$ is fennáll. Végül $d - r = d(5 - 3\sqrt{2}) > 0$, mert $\sqrt{18} < 5$.

Antal Magdolna (Budapest, Varga K. lg. II. o. t.)
Gazsó János (Szeged, Ságvári E. gyak. g. II. o. t.)



5. ábra

Megjegyzés. Kevesebb helyet igényel r szerkesztése a következő módon (5. ábra). Írjunk a d oldalú négyzetbe D csúcsa mint középpont körül d sugarú negyedkört, húzzuk meg D-ből az átlót és mérjük fel az átlónak a körön kívüli e szakaszát D-ból kiindulva az átlóra 3-szor egymás után. Ekkor a harmadik szakasz végpontjának a körívtől való távolsága $3d(\sqrt{2}-1)-d=d(3\sqrt{2}-4)=r$.

Berecz Ágota (Makó, József A. g. II. o. t.)