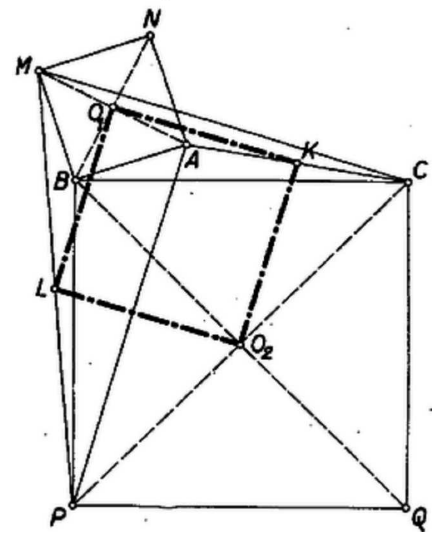
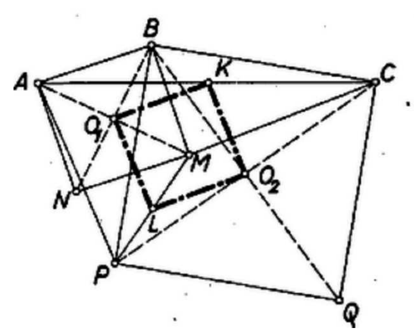
I. megoldás. *a)* A négyzet középpontja felezi az átlókat, ezért a kérdéses $O_1LO_2K = S$ négyszög csúcsai felezik az $AMPC = T$ négyszög oldalait (1. ábra). Így O_1L az APM háromszögnek AP-vel párhuzamos középvonala, $O_1L = AP/2$. Hasonlóan az APC háromszögből $KO_2 \parallel AP$ és $KO_2 = AP/2$, és így $O_1L \# KO_2$. Ugyanígy $O_1K \# LO_2$, ezek szerint S paralelogramma.



1. ábra

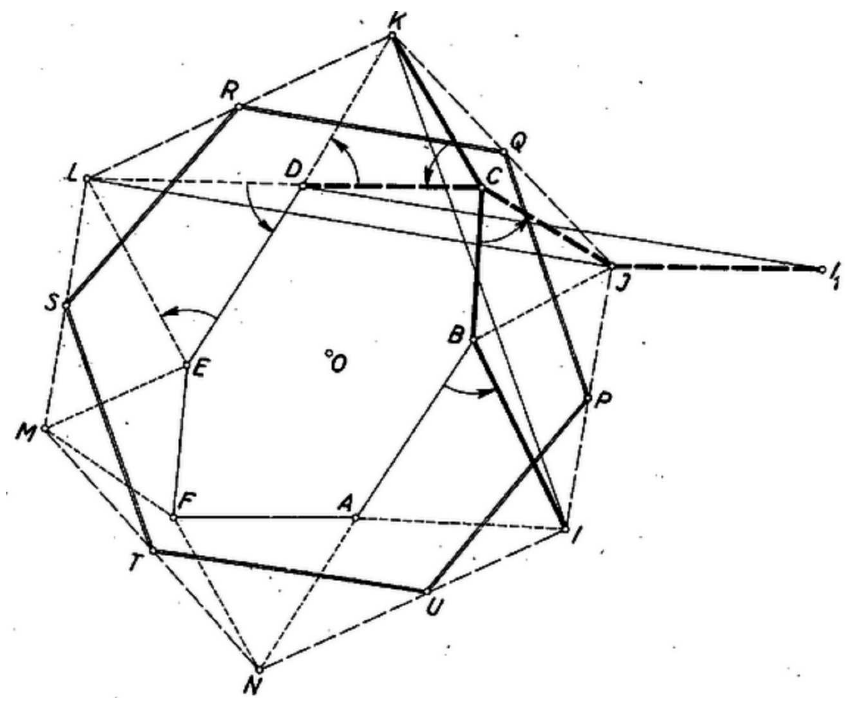
S akkor és csak akkor négyzet, ha két szomszédos oldala merőleges és egyenlő hosszú. Elég azt belátnunk, hogy T-nek AP és MC átlói merőlegesek és egyenlők. Végpontjaikhoz a B csúcsot hozzávéve az ABP és MBC háromszögek egybevágók, mert B körül $90°$-kal elforgatva az egyik a másikba vihető át. Valóban a négyzetek – $ABMN$ és $PBCQ$ – körüljárása megegyezik, így BA ugyanolyan irányú, B körüli, $90°$-os elforgatással vihető át BM-be, mint BP BC-be, ez az elforgatás tehát a ABP háromszöget MBC-be viszi át. Ez abban az esetben is érvényes, ha $ABC\sphericalangle = 90°$, s így az ABP és MBC háromszögek egyenesszakasszá fajulnak. Az AP és MC szakaszok eszerint merőlegesek és egyenlők, mert egy alkalmas, $90°$-os elforgatás az előbbit az utóbbiba viszi át. Ebből, mint láttuk, következik a feladat *a)* részének állítása.



2. ábra

A bizonyítás egyaránt érvényes, ha az ABC háromszög B-nél levő szöge hegyes-, derék-, vagy tompaszög, továbbá akár „kifelé”, akár „befelé” (az oldalegyenesnek a háromszöget nem tartalmazó, ill. az azt tartalmazó partján, 2. ábra) rajzoltuk a négyzeteket; az utóbbi esetben azonban, ha az ABC háromszög B-nél derékszögű, továbbá egyenlő szárú, akkor S négy csúcsa egybeesik.

b) Legyen $ABCDEF = H_1$ egy centrálisan szimmetrikus hatszög, legyenek az előírt szabályos háromszögek BAI, CBJ, DCK, EDL, FEM, AFN, végül az $IJKLMN$ hatszög egymás utáni oldalainak felezőpontjai P, Q, R, S, T, U (3. ábra). Megmutatjuk, hogy a $PQRSTU = H_2$ hatszög bármelyik oldalegyenesét egy–egy (alkalmas középpont körüli) azonos irányú, $60°$-os forgatással át lehet vinni a következőbe. Ebből a *b)* állítás következik. Ugyanis a szabályos hatszög külső szöge $60°$, ennyi az irányváltozás, ha a hatszög körüljárása során egy oldal irányából átfordulunk a következő oldal irányába. Konkrétan azt fogjuk bizonyítani, hogy $QR = PQ$. E két oldal a KJL háromszögnek JL-lel, ill. a JIK-nak IK-val párhuzamos középvonala, ezért a $JL = IK$ egyenlőséget mutatjuk meg, továbbá azt, hogy IK-t a JL-lel párhuzamos helyzetbe egy $60°$-os forgás viszi át.



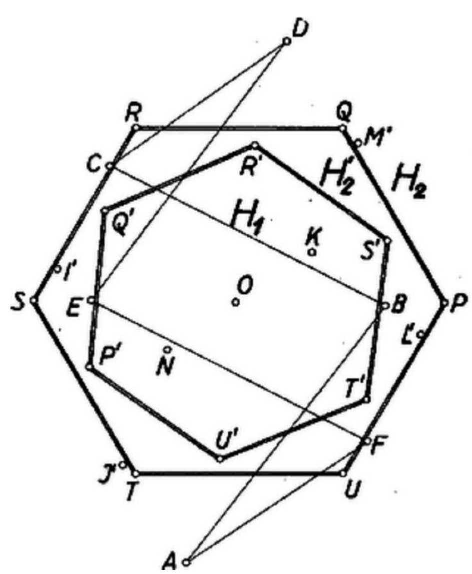
3. ábra

Forgassuk el a $KCBI$ törött vonalat C körül $60°$-kal abban az irányban, hogy B a J-be jusson. Ekkor K a D-be fordul, I új helyzete pedig legyen I_1. A $DLJI_1$ idom paralelogramma, mert egyrészt $DL = DE = BA = BI = JI_1$, másrészt a DL, JI_1 szakaszok párhuzamosak és ellentétes irányúak, ugyanis DL irányából DE és BA, majd BI, végül JI_1 irányába három ugyanazon irányú, $60°$-os forgással jutunk át, vagyis összesen $180°$-os forgással. Ezért $JL = I_1D = IK$, és IK, vagy a vele párhuzamos PQ irányából valóban $60°$-os forgással jutottunk át I_1D, JL és QR közös irányába.

A felhasznált $60°$-os forgások irányának megegyezése abból következik, hogy H_1 oldalaira a szabályos háromszögeket mindig kifelé szerkesztettük, és így a BAI, CBJ, DCK, EDL háromszögek most felsorolt körüljárási irányai egyezők. Ezért első forgatásunkban a KCD forgásszög iránya egyező a CDK és tovább a BCJ forgásszög irányával (a 3. ábrán a forgások pozitívok) – mint állítottuk –, és ugyanilyen irányúak az LDE és az ABI forgások.

A fenti bizonyításban csak 4, a H_1-nek egymás utáni oldalaira rajzolt egyenlő oldalú háromszöget használtunk fel, továbbá H_1 centrálisan szimmetrikus voltából csupán BA és DE párhuzamosságát és egyenlőségét. A feltevés fel nem használt részei H_2 további RS, ST, TU, UP oldalai egyenlőségének bizonyításához szükségesek, valamint ahhoz, hogy a többi külső szögek is $60°$-osak és ugyanolyan forgási irányúak.

Czina Ferenc (Makó, József A. g. I. o. t.)

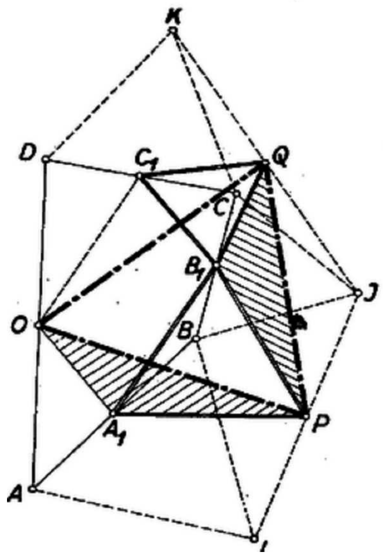


4. ábra

Megjegyzés. A 3. ábrán H_1 konvex, de e tulajdonságát nem használtuk fel; ezért bizonyításunk – a követelménynek megfelelően – tetszés szerinti centrálisan szimmetrikus hatszögre érvényes. A 4. ábrán H_1 hurkolt, itt a szabályos háromszögek „kifelé" való rajzolásának már nincs értelme, mert H_1-nek 4 olyan oldala van, amelyhez képest a többi csúcsok kétoldalt helyezkednek el. Az AB oldalhoz képest a szimmetriacentrummal ellentétes partot vettük külsőnek, tovább pedig úgy haladtunk, hogy a BAI, ..., AFN háromszögek egyenlő körüljárásúak legyenek. Fel van tüntetve az oldalak másik partján szerkesztett ABI', ..., FAN' szabályos háromszögekből adódó $P'Q'R'S'T'U'$ hatszög is, – hiszen AB-nek másik partját is vehettük volna külsőnek. A bizonyításból nyilvánvaló, hogy ez is szabályos, valamint az is, hogy nem hurkolt H_1 oldalaira mindig befelé rajzolt szabályos háromszögekből kiindulva is igaz az állítás, hacsak a P, ..., U pontok nem esnek egybe. Az így adódó H_2' a H_2 höz képest mindig ellentétes körüljárású.

II. megoldás a *b) részre.* A következőkben csak vázoljuk egy második megoldás gondolatmenetét, nem elemezve, hogyan módosul az az ábrától különböző viszonyok (pl. konkáv vagy hurkolt hatszög) esetén.

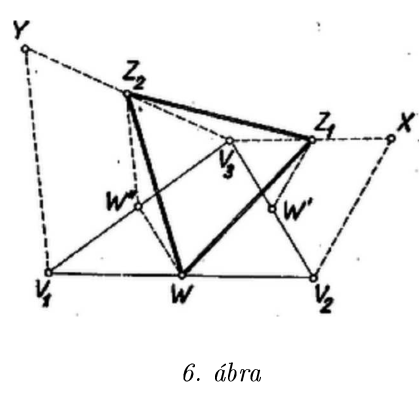
Elég megmutatnunk, hogy pl. OPQ szabályos háromszög – ahol O a H_1 középpontja –, mert akkor ugyanez áll az OQR, ORS, OST, OTU, OUP háromszögekre is, s így $PQRSTU$ szabályos hatszög. A P, Q pontok megszerkesztésében viszont csak az AB, BC, CD oldalak fölé rajzolt szabályos háromszögeknek van szerepe.



5. ábra

Tekintsük tehát az ábrának csak az $ABCD$ négyszög meghatározta részét (5. ábra). Itt O az AD oldal középpontja. Ha még berajzoljuk az AB, BC, CD oldalak A_1, B_1, C_1 felezőpontját, akkor az A_1PB_1, B_1QC_1 háromszögek szabályosnak látszanak. Megmutatjuk, hogy valóban szabályos háromszögek. A két háromszög hasonló módon keletkezik az IBJ, ill. JCK háromszögből. Az állítást a következő segédtétel fejezi ki:

Rajzoljunk egy $V_1V_2V_3$ háromszög V_2V_3 és V_3V_1 oldalára kifelé V_2V_3X és V_3V_1Y szabályos háromszögeket (6. ábra). *Ekkor a V_1V_2, V_3X és V_3Y szakaszok W, Z_1 és Z_2 felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai.*



6. ábra

Jelöljük még a V_2V_3 és V_3V_1 oldalak felezőpontjait W', W''-vel. Ekkor V_3Z_2W'' szabályos háromszög. Forgassuk el Z_2 körül a $Z_2W''W$ háromszöget 60°-kal úgy, hogy W'' a V_3 pontba menjen át. Ekkor W elforgatás után Z_1-be kerül, mert mint középvonal $W''W\#V3W'$, másrészt Z_1V_3W' szabályos háromszög, tehát Z_1V_3 egyenlő $W''W$-vel és irányaik a kívánt irányban 60°-os szöget zárnak be. Az elforgatás így Z_2W-t Z_2Z_1 be viszi át, a két szakasz tehát egyenlő és 60°-os szöget zár be, vagyis a Z_1Z_2W háromszög szabályos.

A segédtételt $V_1V_2V_3$ helyett IJB-re, ill. JKC-re alkalmazva nyerjük, hogy az A_1B_1P és B_1C_1Q háromszögek valóban szabályosak.

Az OPQ háromszög szabályos voltának megmutatásához forgassuk most el a PA_1O háromszöget P körül $60°$-kal úgy, hogy A_1 a B_1-be jusson. $A_1OC_1B_1$ paralelogramma, így $A_1O \# B_1C_1$; mivel továbbá C_1B_1Q szabályos háromszög, így A_1O és B_1Q iránya $60°$-os szöget zár be, a PA_1O háromszög elforgatás után tehát PB_1Q-t fedi. Eszerint PO és PQ egyenlő és $60°$-os szöget zár be, tehát POQ szabályos háromszög.

Mint láttuk, ebből következik a feladat b) részének állítása.

Kobzos László (Vác, Lőwy S. gépip. t. II. o. t.)

Megjegyzés. Néhányan vektorok felhasználásával bizonyították az állításokat, vagy a komplex számsíkon végzett számításokkal.