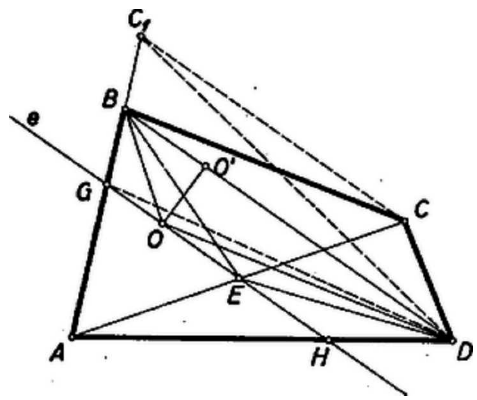
I. Egyelőre csak az $ABCD = N$ négyszög belsejében keressük az előírt tulajdonságú pontokat. Ekkor O benne van a BDA és BDC háromszögek egyikében, legyen a betűzés olyan, hogy a $BDA\triangle$-ben. Így az $OBCD$ négyszög területe egyenlő a BDC és BDO háromszögek területének összegével, az $OBAD$ négyszögé pedig a BDA és BDO háromszögek területének különbségével, mert ez a négyszög konkáv. A területeket ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat, az $OBCD = OBAD$ követelményből

$$BDC + BDO = BDA - BDO, \text{ és így}$$
$$BDO = \frac{BDA - BDC}{2}.$$



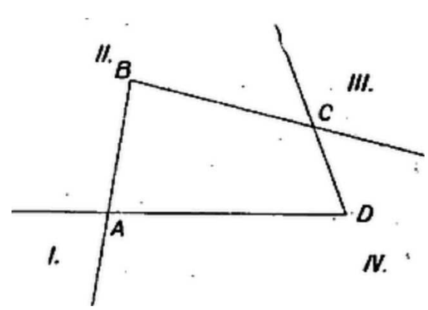
1. ábra

A BDO háromszög területe tehát az O pont minden helyzetére ugyanaz az érték kell, hogy legyen. Állandó a BD oldal is, tehát az O pontból erre bocsátott OO' magasság is állandó kell, hogy legyen O minden helyzeténél, tehát minden megfelelő O pont rajta van egy a BD-vel párhuzamos e egyenesen.

Az AC átló E felezőpontja hozzátartozik a mértani helyhez. Ugyanis az ABE és EBC háromszögek AE és EC oldala egyenlő, az ezekre B-ből bocsátott magasság közös, tehát területük egyenlő. Ugyanígy látható, hogy $AED = ECD$. Mivel pedig N konvex, így E a belsejében van, és az $ABED$ négyszög az ABE és AED háromszög összege, a $BCDE$ négyszög pedig a BCE és CDE háromszögeké, területük tehát valóban egyenlő. – Eszerint e az E-n át a BD átlóval párhuzamosan húzott egyenes, O az e-nek csak az N-be eső GH szakaszán lehet (G az AB-n van, H az AD-n).

Ha a GH szakasz egy tetszés szerinti belső pontja O^*, akkor $O^*BAD = ABD - O^*BD$, és ez O^* megválasztása szerint egyenlő $EBAD = EBCD = O^*BCD$-vel, tehát O^* beletartozik a mértani helybe. G-t véve O gyanánt, a $GBAD$ négyszög elfajult, területe annyi, mint a GAD háromszögé; de így is egyenlő $GBCD$ területével. Eszerint G tágabb értelemben szintén hozzátartozik a mértani helyhez és ugyanez áll H-ra is.

N-en kívül nincs az $OBAD = OBCD$ követelménynek megfelelő O pont. Ha ugyanis az A, vagy a C szög csúcsszögtartományának egy pontja P (2. ábra I és III síkrésze), akkor a $PBAD$ és $PBCD$ négyszögek egyike éppen N területével nagyobb a másiknál, nem egyenlők. A sík H részében vett P-vel a PD szakasz átmetszi az AB és BC szakaszok egyikét, a IV-ben pedig PB szakasz metszi az AD és DC szakaszok egyikét, ezért a $PBAD$ és $PBCD$ négyszögek egyike hurkolt, az ilyenek területét viszont nem értelmeztük.



2. ábra

Ezek szerint a keresett mértani hely a BD átlóval az AC átló felezőpontján át húzott párhuzamosnak N-be eső szakasza, végpontjait csak tágabb értelemben megengedve. Ha BD felezi AC-t, akkor a mértani hely csak tágabb értelemben létezik – maga a BD szakasz az –, mert az $OBAD$ és $OBCD$ négyszögek elfajulnak háromszöggé.

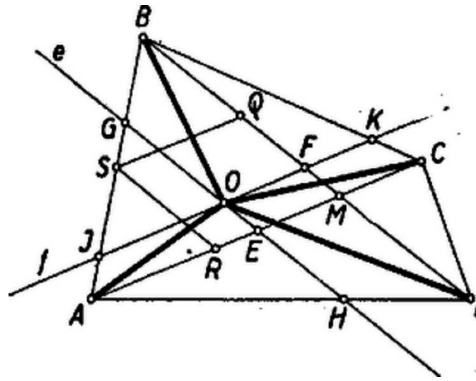
II. Eredményünkből – az A, B, valamint C, D betűk felcserélésével következik, hogy az $OABC = OCDA$ követelményt kielégítő O pontok mértani helye az AC átlóval a BD átló F felezőpontján át húzott f párhuzamosnak N-be eső JK szakasza, a végpontokat csak tágabb értelemben engedve meg. (Ha AC felezi BD-t, akkor $JK \equiv AC$, és az $OABC$, $OCDA$ négyszögek elfajulnak.) Ennélfogva a keresett O pont csak e és f metszéspontja lehet, de csak akkor felel meg, ha N belsejében van. Megmutatjuk, hogy ez mindig teljesül.

E közelebb van az átlók M metszéspontjához, mint A-hoz, mert feltevésünk mellett BD ugyanazon partján van, mint A, így pedig $AE = EC = EM + MC > EM$. Hasonlóan kapjuk – olyan betűzést használva, amely mellett B távolabb van AC-től, mint D –, hogy F közelebb van M-hez, mint B-hez. Így az $MEOF$ paralelogramma benne van az $MRSQ$ paralelogrammában – ahol Q, R, S az ABM háromszög oldalfelező pontjai –, tehát O benne van az ABM háromszögben, amely része N-nek. Ha pedig egyik, vagy mindkét átló felezi a másikat, akkor e és f metszéspontja a másikat felező átló felezőpontja, tehát N-ben van. Ezzel a megoldást befejeztük.

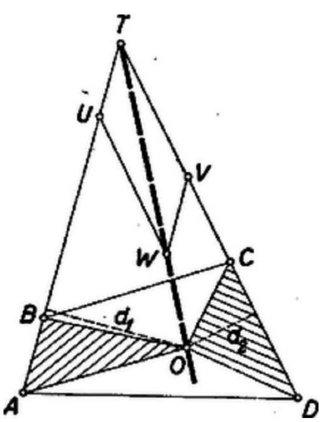
Gecsey László (Budapest, József A. g. II. o. t.)
Horváth Péter (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)
Corradi Gábor (Győr, Czuczor G. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az e egyenest az E pont felhasználása nélkül is megkaphatjuk. Messe a BD-vel párhuzamos, C-n átmenő egyenes AB-t C_1-ben (1. ábra), ekkor az AC_1 szakasz felezőpontja G. Erre abból is rájöhetünk, hogy $OBCD = OBAD$-ből $OBCD = N/2$, és ekkora terület kijelölése céljára előkészítésül N helyett a vele egyenlő területű AC_1D háromszöget is felezhetjük DG-vel.

Horváth Péter



3. ábra



4. ábra

2. A feladat II. részében keresett O pontot az I. részben megállapított helyett más mértani hely felhasználásával is megkaphatjuk. $OABC = OBCD$-ből az OBC közös rész elhagyásával $OAB = OCD$, ezért O-nak AB és CD-től való d_1, ill. d_2 távolságára $d_1 : d_2 = CD : AB$. Könnyű belátni, hogy eszerint O mértani helye egy az AB és CD egyenesek T metszéspontján átmenő egyenes, és ennek egy további W pontját úgy kapjuk, ha felmérjük TA-ra a $TU = AB$ szakaszt, TC-re a $TV = CD$ szakaszt és megszerkesztjük az $UTVW$ paralelogrammát. Még egy egyenest kapunk O-ra $OBC = ODA$-ból, a kettő metszéspontja a keresett O.

3. A hurkolt négyszög területén az oldalak által körülhatárolt két háromszög területének összegét értve *Gecsey László* és *Horváth Péter* az N-en kívül is találtak O pontokat: így a DG egyenes G-ből kiinduló, D-t nem tartalmazó félegyenesének minden pontja megfelel, továbbá a BH egyenes H-ból kiinduló, B-t nem tartalmazó félegyenesének minden pontja.

Megjegyezzük, hogy célszerűbb hurkolt idomok területét úgy értelmezni, hogy az egyes körüljárt részidomok területét előjellel vesszük aszerint, hogy a hurkolt idom határát egyszer végigjárva a részidom határoló vonalán milyen körüljárási irány szerint haladtunk végig.