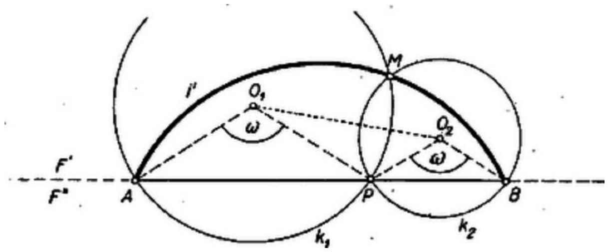
I. megoldás. A P-hez rendelt k_1 és k_2 körök középpontját vehetjük az AB egyenessel kettévágott sík ugyanazon félsíkján, vagy a két különböző félsíkon (magán az AB szakaszon nem, mert $\lambda > 1/2$, és így a középpontok AP-vel, ill. PB-vel valóságos háromszöget alkotnak). Tekintsük előbb az első lehetőséget. Legyen a két középpont O_1 és O_2 az F' félsíkon úgy, hogy $0_1A = O_1P = \lambda \cdot AP$ és $O_2B = O_2P = \lambda \cdot BP$, és a körök második közös pontja M (első közös pontnak P-t véve). Az APO_1 és $PBO_2\triangle$-ek hasonlók, mert az egymás utáni oldalak aránya mindkettőben $1 : \lambda : \lambda$; ezért $AO_1P\sphericalangle = PO_2B\sphericalangle$. Ez a szög független P helyzetétől, csak λ értékétől függ; jelöljük a nagyságát ω-val. AMP az első körben a rövidebb (az F''-beli) AP íven nyugvó kerületi szög, ugyanígy a PMB szög a második kör F''-beli PB ívén (mert M ugyancsak F'-n van, ugyanis M a P-nek tükörképe az O_1O_2 egyenesre). Ezért $AMP\sphericalangle = PMB\sphericalangle = \omega/2$, és $AMB\sphericalangle = AMP\sphericalangle + PMB\sphericalangle = \omega$, állandó, tehát M csak azon az (F'-beli) i' köríven lehet, amelynek pontjaiból az AB szakasz ω szögben látszik.



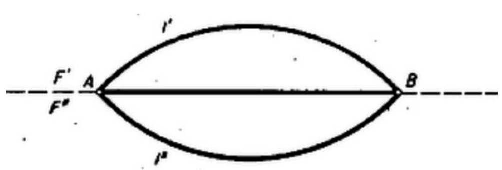
1. ábra

Ha már most M^* az i'-nek tetszés szerinti, A-tól és B-től különböző pontja, akkor létezik olyan P^* pont, amelyhez a feladat előírása szerint éppen M^* tartozik hozzá, éspedig P^*-ot az AM^*B szög felezője metszi ki AB-ből. Így ugyanis $AM^*P^*\sphericalangle = P^*M^*B\sphericalangle = \omega/2$, tehát M^* rajta van a P^*-hoz hozzárendelt körökön (továbbá különbözik P^*-tól, másrészt P^* az AB szakasz belsejében van). Ha M az A-ban vagy a B-ben volna, P^* egybeesnék A-val, ill. B-vel, így viszont az M-et meghatározó körök egyike nem jönne létre.

Ezek szerint az i' ív belseje része a keresett mértani helynek; és nyilván ugyanez áll i'-nek AB-re vett i'' tükörképére is. Ezt akkor kapjuk, ha a P-hez hozzárendelt körök középpontjait F''-ben vesszük fel.

Végül ha O_1 az F'-n, O_2 pedig F''-n van, az utóbbit jelöljük O_2''-vel, akkor O_2'' nyilván mindig a fenti O_2-nek AB-re vett tükörképe. Így O_2'', P és O_1 egy egyenesbe esnek, mert a tükrözés, valamint az APO_1 és BPO_2 egyenlő szárú háromszögek hasonlósága miatt $O_2''PB\sphericalangle = O_2PB\sphericalangle = O_1PA\sphericalangle$, tehát a P-höz rendelt két kör érinti egymást. Ezért második közös pontjuk is maga P.

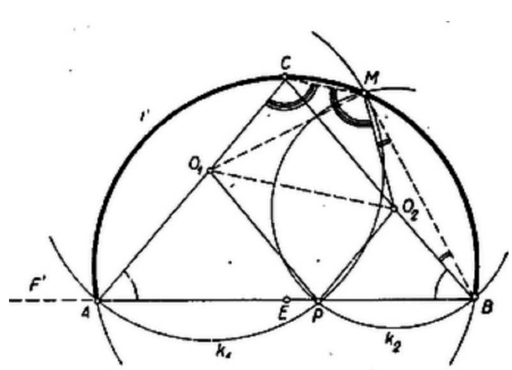
Mindezek szerint a keresett mértani hely az i', i'' körívekből és az AB szakaszból áll, A-t, B-t nem hozzászámítva.



2. ábra

Bulkai Lajos (Győr, Czuczor G. g. I. o. t.)

II. megoldás. Csak az F'-beli M pontok mértani helyét vizsgáljuk. Az I. megoldásbeli ω szög állandósága folytán az O_1AB és O_2BA szögek is állandók, tehát O_1 és O_2 a P minden helyzetében annak az ABC egyenlő szárú háromszögnek a szárain vannak, amelyre $AC = BC = \lambda \cdot AB$ és $ACB\sphericalangle = \omega$, mégpedig úgy, hagy $PO_1 \parallel BC$, $PO_2 \parallel AC$. Megmutatjuk, hogy M mindig rajta van az $ABC\triangle$ körülírt körének F'-beli ívén. A szimmetria miatt szorítkozhatunk az EB szakaszon levő pontokra, ahol E az AB szakasz felezőpontja.



3. ábra

Ha $P \equiv E$, akkor nyilván $M \equiv C$. – Az O_1PO_2C idom mindig paralelogramma, ezért az $O_1O_2C\triangle$ egybevágó és azonos körüljárású O_2O_1P-vel, ez pedig egybevágó és ellentétes körüljárású O_2O_1M-mel, mert M a P tükörképe O_1O_2-re. Ezért O_1O_2C és O_2O_1M egymás tükörképei O_1O_2 felező merőlegesére, tehát O_1O_2MC egyenlő szárú (húr-) trapéz és $O_2MC\sphericalangle = O_1CM\sphericalangle$. Így az $ABMC$ négyszög A és M csúcsainál levő szögek összege:

$$BAC\sphericalangle + BMC\sphericalangle = ABC\sphericalangle + (BMO_2\sphericalangle + O_2MC\sphericalangle) = (ABC\sphericalangle + O_2BM\sphericalangle) +$$
$$+ O_1CM = ABM\sphericalangle + ACM\sphericalangle,$$

egyenlő a B és C csúcsoknál levő szögek összegével, tehát a négyszög húrnégyszög. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megfordítva: az $ABC\triangle$ köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívén felvett tetszés szerinti M^*-hoz úgy kapjuk az őt előállító P^* pontot, mint a BM^* felező merőlegesével BC-ből kimetszett O_2^* pont körül $O_2^*B = O_2^*M^*$ sugárral írt k_2^* körnek AB-vel való második metszéspontját. Így a P^*BO_2 egyenlő szárú háromszög hasonló $ABC\triangle$-höz, mert B-nél levő szögük közös, ezért $O_2^*P^* = \lambda \cdot P^*B$, vagyis O_2^* azonos a P^*-hoz rendelt O_2-vel, k_2^* azonos k_2-vel, tehát k_2 valóban átmegy M^*-on; továbbá $P^*O_2 \parallel AC$. A P^*-hoz rendelt O_1-et AC-ből a P^*-on átmenő, BC-vel párhuzamos metszi ki, és csak azt kell belátnunk, hogy az O_1 körül O_1P sugárral írt kör átmegy M^*-on. M^* felvétele folytán $BAC\sphericalangle + BM^*C\sphericalangle = ABM^*\sphericalangle + ACM^*\sphericalangle$. Vonjuk ki ebből a feltevés és O_2 szerkesztése folytán fennálló $BAC\sphericalangle + BM^*O_2\sphericalangle = ABC\sphericalangle + O_2BM^*\sphericalangle = ABM^*\sphericalangle$ egyenlőséget, nyerjük: $O_2M^*C\sphericalangle = ACM^*\sphericalangle = O_1CM^*\sphericalangle$. Másrészt szerkesztésnél fogva $CO_1 = O_2P^* = O_2M^*$, tehát a CM^*O_1 és M^*CO_2 háromszögek egybevágók, mert a C-ben, ill. M^*-ban levő szögeik és itt összefutó oldalaik egyenlők. Ezért O_1M^* egyenlő O_2C-ve1, ez pedig szerkesztésnél fogva P^*O_1-gyel, k_1 sugarával, tehát k_1 valóban átmegy M^*-on.

Eszerint M mértani helye (F'-ben) az AB szakasz $AMB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \omega$ nyílású látószögköríve.

Corradi Gábor (Győr, Czuczor G. g. II..o. t.)

Megjegyzés. A fentiek alapján $CO_1 + CO_2 = CA$, állandó, és M-et így is származtathatjuk: egy ABC egyenlő szárú háromszög ($AC = BC$) AC és BC szárán legyen O_1 és O_2 úgy, hogy $O_1C + CO_2 = AC$. Ekkor M az O_1CO_2 háromszög köré írt kör második közös pontja a C-n átmenő, O_1O_2-vel párhuzamos egyenessel. Így a feladat az 1961. évi Arany Dániel tanulóversenyek haladó fokán a II. fordulóban kitűzött 3. feladat[1] általánosítása arra az esetre, ha derékszög helyett a λ-val meghatározott ACB szögből indulunk ki. $\lambda = 1/\sqrt{2}$ esetén az ACB szög derékszög.

Corradi Gábor

[1] Lásd K. M. L. 24 (1962/1) 11. o.