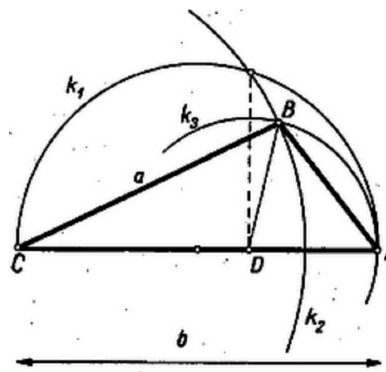
Előzetes megjegyzés. A szögek egyszerű aránya alapján az ábrát többféleképpen is kiegészíthetjük úgy, hogy tartalmazzon egyenlő szárú háromszöget. Az I. megoldás az elemzéshez a legkevesebb és a legtermészetesebb kiegészítést veszi, tovább viszont a többieknél erősebb eszközöket használ.

I. megoldás. Képzeljük a feladatot megoldottnak és legyen a keresett ABC háromszögben $BC = a = 4$ cm, $AC = b = 5$ cm és $\beta = ABC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle = 2\alpha$. Messe az ABC szög felezője AC-t D-ben. Az ABD háromszög A-nál és B-nél levő szögei egyenlők, ezért $BD = AD$, másrészt $BDC\sphericalangle = 2BAD\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, tehát a BDC háromszög hasonló ABC-höz, mert szögeik egyenlők. Így

$$CD : CB = CB : CA, \tag{1}$$

vagyis CB mértani középarányos CA és az ismeretlen CD között, tehát CD megszerkeszthető. Ebből megkapjuk $DB = DA$-t, ennélfogva a CDB háromszög is megszerkeszthető.



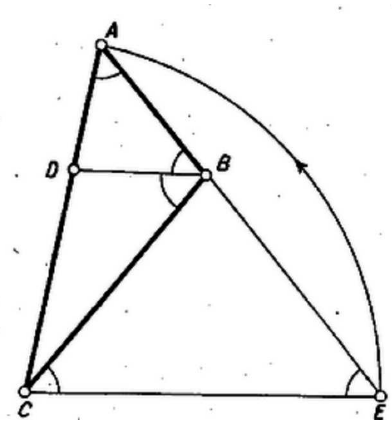
1. ábra

Egy lehetőség a végrehajtásra: az adott AC szakasz mint átmérő fölé k_1 (Thalész-) kört és C körül az adott CB sugárral k_2 kört írunk, metszéspontjuknak AC-n levő vetülete D; a D körül DA sugárral írt k_3 kör k_2-ből kimetszi B-t, a keresett háromszög harmadik csúcsát.

A nyert ABC háromszögben AC, CB hossza az előírás szerinti, másrészt $DA = DB$ miatt $BDC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle$; (1) alapján a közös szögű ABC és BDC háromszögek hasonlók, így $ABC\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle$, tehát ABC háromszög megfelel a követelményeknek. Két B pontot kapunk, de ezek AC-re tükrösek, csak egy megoldás van.

Régi Erzsébet (Székesfehérvár, Teleki B. lg. II. o. t.)

Megjegyzés. Többen diszkussziót fűztek megoldásukhoz. Ennek itt nincs helye, mert AC és BC értéke rögzített, nincs változási lehetőség. Ilyenkor vagy van megoldás – mint itt is –, vagy nincs.



2. ábra

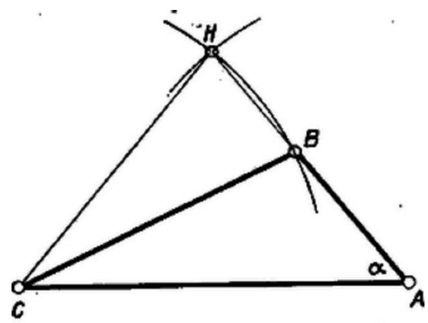
II. megoldás. Messe a C-n át BD-vel párhuzamosan húzott egyenes AB meghosszabbítását E-ben (2. ábra). Ekkor

$$AEC\sphericalangle = ABD\sphericalangle = BAD\sphericalangle = DBC\sphericalangle = ECB\sphericalangle,$$

részben a szerkesztés, részben a feladatnak a szögekre vonatkozó feltétele következtében. Így egyrészt az ACE, másrészt a CBE háromszög egyenlő szárú: $EC = AC$, $EB = BC$. A CBE háromszög mindegyik oldala ismert, tehát a háromszög $2\,BC > CE$ folytán megszerkeszthető. Ezután A-t mint a C körül CE sugárral rajzolt kör és az EB egyenes második metszéspontját kapjuk. $CB < CE$ folytán ez E-től különböző pont, és B az A és E közt fekszik.

Az ABC háromszögben AC és BC a kívánt hosszúságú, másrészt $BCE\sphericalangle = CEB\sphericalangle = CAE\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle = BCE\sphericalangle + BEC\sphericalangle = 2CAE\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$. Így a nyert háromszög megfelel a feladat követelményeinek.

Berendi Emma (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. II. o. t.)



3. ábra

III. megoldás. Messe az AB egyenest a C körül BC sugárral rajzolt kör másodszor a H pontban (3. ábra). B és H különbözők, kivéve ha $ABC\sphericalangle = 90^\circ$, $BAC\sphericalangle = 45^\circ$, amikor $BC = AC/\sqrt{2}$, de ez esetünkben nem áll fenn. A H pont vagy A és B közt van ($BC < AC$ folytán), vagy AB-nek a B-n túli meghosszabbításán. Vizsgáljuk az AHC háromszöget. Az első esetben[1] $AHC\sphericalangle = 180^\circ - BHC\sphericalangle = 180^\circ - HBC\sphericalangle = 80^\circ - 2\alpha$; a második esetben $AHC\sphericalangle = HBC\sphericalangle = 180^\circ - ABC\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$, így mindkét esetben $ACH\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$, tehát az AHC háromszög egyenlő szárú, $AH = HC = BC$. Ennélfogva a keresett háromszög B csúcsát az $AC = b$ alap fölé a szárral szerkesztett ACH egyenlő szárú háromszög AH szárából a C körül a sugárral írt körív metszi ki. – A végrehajtás szempontjából ez a szerkesztés a legegyszerűbb, hiszen az említett körívet már az ACH háromszög szerkesztése közben megrajzoltuk.

Csada Imre (Budapest, Petőfi S. g. II. o. t.)

[1] A méretekből az adódik, hogy itt a 2. esettel állunk szemben, ezt mutatja a 3. ábra. Ezen az 1. esetre elgondolt viszonyokat B és H felcserélésével szemlélhetjük.