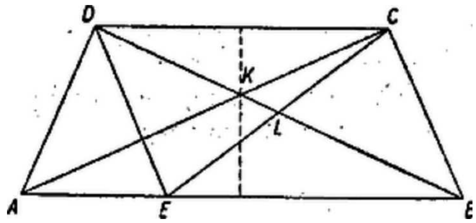
**I. megoldás.** Legyen az $ABCD$ trapézban $AB = 3m$, $CD = 2m$. Így a párhuzamos $C$ és $D$ egyikéből indul ki, legyen $DE \parallel CB$. A trapéz és a $BCDE$ paralelogramma közös $BD$ átlójának $AC$, $EC$-vel való metszéspontját $K$, ill. $L$-lel jelölve a kérdéses $CKL$ háromszög $t$ területét a $CDL$ és $CDK$ háromszögek $t_1$, $t_2$ területéből kivonással kaphatjuk. Az előbbi a paralelogramma $1/4$ része, így $t_1 = 2m \cdot m/4 = m^2/2$.



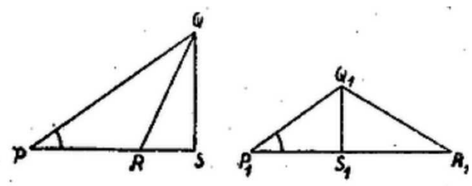
1. ábra

A $CDK$ háromszög hasonló $ABK$-hoz, így $K$-ból húzott magasságaik aránya megegyezik az alapok $2:3$ arányával, összegük viszont $m$, tehát $CDK$ magassága $2m/5$, területe $t_2 = 2m^2/5$. Ezek szerint $t = m^2/10$. – A trapéz területe viszont $T = 5m^2/2$, tehát valóban $T/t = 25$.

*Gondol Ibolya* (Tapolca, Bacsányi J. g. I. o. t.)

*Megjegyzés.* Egy más felbontás (az idomok jele egyszersmind a területet is jelöli):

$$CKL = ABC - ABK - BCL = \frac{1}{2}(AEC - AEK).$$



2. ábra

**II. megoldás.** A $CKL\triangle$ területének kiszámításához a fenti hasonlóságból felhasználjuk, hogy $CK : AK = 2:3$, és így $CK = 2CA/5$. Másrészt $CL = CE/2$. A $CKL$ és $CAE$ háromszögek $C$-nél levő szöge közös, ezért területeik aránya – mint alább megmutatjuk – megegyezik a $C$-ből kiinduló oldalaikból képezett szorzatok arányával:

$$CKL : CAE = (CK \cdot CL) : (CA \cdot CE) = \left(\frac{2}{5}CA \cdot \frac{1}{2}CE\right) : (CA \cdot CE) = 1:5.$$

Ámde a $CAE$ háromszög területe $m^2/2$, mert $AE = AB - DC = m$, tehát ismét $CKL = m^2/10$.

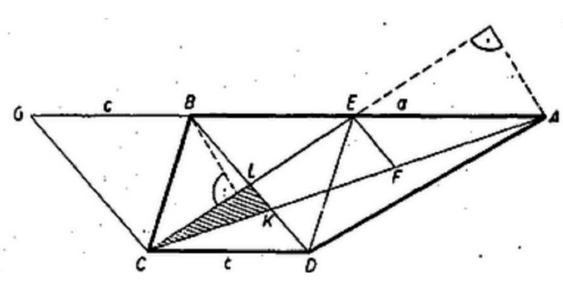
A felhasznált segédtétel bebizonyítása végett húzzuk meg a $PQR$ és $P_1Q_1R_1$ háromszögekben – amelyekben $QPR\sphericalangle = Q_1P_1R_1\sphericalangle$ –, a $QS$, $Q_1S_1$ magasságot. Ekkor a $PQS$ és $P_1Q_1S_1$ derékszögű háromszögek hasonlóságát felhasználva

$$PQR : P_1Q_1R_1 = \frac{PR \cdot QS}{2} : \frac{P_1R_1 \cdot Q_1S_1}{2} =$$
$$= PR\frac{QS}{Q_1S_1} : P_1R_1 = PR\frac{QP}{Q_1P_1} : P_1R_1 = \frac{PR \cdot PQ}{P_1R_1 \cdot P_1Q_1}.$$

A segédtétel nyilván akkor is érvényes, ha $QPR\sphericalangle + Q_1P_1R_1 = 180°$.

*Bock György* (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

**III. megoldás.** Tetszés szerinti $ABCD$ trapézban legyen $CDA\sphericalangle > BCD\sphericalangle$. Bontsuk a trapézt a $BC$ szárral párhuzamos $ED$ szakasszal paralelogrammára és háromszögre. Messe a $BD$ átlót $AC$, ill. $CE$ a $K$, ill. $L$ pontban. Meg fogjuk határozni a trapéz $T$ területének és a $CKL$ háromszög $t$ területének az arányát. Legyenek a trapéz párhuzamos oldalai $AB = a$, $CD = c$.



3. ábra

A trapézt az $ACD$, $AEC$ és $BCE$ háromszögekre bontottuk. Ezek közül az első és az utolsó egyenlő területű, mert $BE = CD = c$ (egy paralelogramma szemben fekvő oldalai), és az ehhez tartozó magasságok is egyenlők (a trapéz magassága). Jelöljük ezt a területet $t'$-vel, az $AEC$ háromszög területet $t''$-vel. Ezek aránya, mint pl. a $CE$ oldal mentén csatlakozó két háromszög területének aránya, megegyezik a közös oldalhoz tartozó magasságok arányával, az pedig a $BE/AE$ aránnyal:

$$\frac{t'}{t''} = \frac{BE}{AE} = \frac{c}{a-c}; \quad T = 2t' + t'' = \left(\frac{2c}{a-c} + 1\right) t'' = \frac{a+c}{a-c} t''.$$

A keresett arány meghatározásához a $t''/t$ arányra van még szükségünk. Húzzunk $E$-ből $BD$-vel párhuzamos $EF$ szakaszt a $CA$ egyenesig. Ekkor, mivel $CE = 2CL$ (a $BCDE$ paralelogramma átlói felezik egymást), így a $CKL$ háromszöghöz hasonló $CEF$ háromszög területe $4t$. A $t''/4t$ arányt úgy határozhatjuk meg, mint az $AEC$ és $CEF$ háromszögek területének az arányát. Ez megegyezik a közös magassággal rendelkező $AC$ és $FC$ oldalak arányával. Húzzunk $C$-ből párhuzamost $BD$-vel, messe ez $AB$ meghosszabbítását $G$-ben. Ekkor $BG = c$, s így

$$\frac{t''}{4t} = \frac{AC}{FC} = \frac{AG}{EG} = \frac{a+c}{2c}, \qquad t'' = 2\frac{a+c}{c} t.$$

$$T = \frac{a+c}{a-c} t'' = 2\frac{(a+c)^2}{c(a-c)} t.$$

A $T/t$ arányt $a$ és $c$, sőt már arányuk: $a/c$ is meghatározza:

$$T = 2\frac{(a+1)^2}{a-1} t.$$

A feladatban $a = 3/2$, s így

$$T = 2\frac{(5/2)^2}{1/2} t = 25t.$$

A feladatban fölösleges adat tehát a párhuzamos oldalak viszonya a magassághoz, csak az arányukra volt szükségünk. Azt sem használtuk ki (egyik bizonyításban sem), hogy a trapéz szimmetrikus.