I. Írjuk fel először az adott számokat minden lehetséges módon más-más négy négyzetszám összegeként, vagyis egyelőre tekintet nélkül a sorrendre és az alapok előjelváltozataira. Ezt megkönnyíthetjük avval, ha előre megállapítjuk az előállításokban fellépő páratlan négyzetszámok számát. Megjegyezzük, hogy páros szám négyzete nyilvánvalóan osztható 4-gyel – más szóval $4A$ alakú, ahol $A$ egész –, páratlan szám négyzete pedig 4-gyel osztva maradékul 1-et ad, $4A+1$ alakú, ugyanis $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, tehát $A = k(k+1)$. Innen azt is látjuk, hogy a páratlan négyzetszámok 8-cal osztva is 1-et adnak maradékul, $8B+1$ alakúak, ugyanis a $k(k+1)$ szorzat tényezői szomszédos egész számok, tehát egyikük páros, s így a szorzat is.

Páratlan számok előállításában a páratlan tagok számának páratlannak kell lennie, 1-nek, vagy 3-nak. Ámde az adott számok közül a páratlanok: 25 és 105, $4A+1$ alakúak, viszont három $4A+1$ alakú szám összege $4C+3$ alakú, így 25 és 105 előállításai pontosan egy páratlan négyzetszámot tartalmaznak.

Páros számaink közül 28 és 84 oszthatók 4-gyel, és 8-cal osztva maradékul 4-et adnak. Ezért kívánt előállításaik állhatnak négy páros négyzetszámból és 4 páratlanból is, mert négy $4A+1$ alakú szám összege $4D$ alakú, és négy $8B+1$ alakú szám összege $8E+4$ alakú.

A 96 viszont 8-cal is osztható, ezért előállításaiban csak négy páros négyzetszám léphet fel. (Két páros és két páratlan szám négyzetének az összege páros, de 4-gyel nem osztható, így ez egyik adott szám előállításánál sem léphet fel.)

$n = 25$ előállítása páratlan tagjának csak a nála kisebb 25-öt, 9-et, vagy 1-et vehetjük. Így a további három páros tag összegének 0-nak, ill. $25-9=16$-nak, ill. 24-nek kell lennie. Ezek a használható 16, 4 és 0 tagokból egy-egy féleképpen állíthatók elő:

$$25 = 25 + 0 + 0 + 0, \tag{1}$$
$$= 9 + 16 + 0 + 0, \tag{2}$$
$$= 1 + 16 + 4 + 4. \tag{3}$$

Hasonlóan $n = 105$ négytagú előállításai:

$$105 = 81 + 24 = 81 + 16 + 4 + 4, \tag{4}$$
$$= 49 + 56 = 49 + 36 + 16 + 4, \tag{5}$$
$$= 25 + 80 = 25 + 64 + 16 + 0, \tag{6}$$
$$= 9 + 96 = 9 + 64 + 16 + 16, \tag{7}$$
$$= 1 + 104 = 1 + 100 + 4 + 0, \tag{8}$$
$$= 1 + 64 + 36 + 4. \tag{9}$$

$n = 28$ előállításai a nála kisebb 25, 9, 1 páratlan négyzetszámokból

$$28 = 25 + 1 + 1 + 1, \tag{10}$$
$$= 9 + 9 + 9 + 1; \tag{11}$$

a nála kisebb 16, 4, 0 páros négyzetszámokból pedig

$$28 = 16 + 4 + 4 + 4. \tag{12}$$

Hasonlóan $n = 84$-re, végül $n = 96$-ra

$$84 = 81 + 1 + 1 + 1, \tag{13}$$
$$= 49 + 25 + 9 + 1, \tag{14}$$
$$= 25 + 25 + 25 + 9; \tag{15}$$
$$84 = 64 + 16 + 4 + 0, \tag{16}$$
$$= 36 + 16 + 16 + 16. \tag{17}$$
$$96 = 64 + 16 + 16 + 0. \tag{18}$$

II. A sorrendi lehetőségek számbavételénél azt nézzük, vannak-e az előállítás tagjai között egyenlők (ugyanis egyenlő tagok felcserélésével nem kapunk új sorrendet), az előjelváltozatoknál pedig azt, hogy fellép-e a tagok között a 0 (mert a 0 számnak nincs előjele). Pl. a (18) előállítás 64-es tagja részére a 4 hely (azaz $x^2$, $y^2$, $z^2$ és $u^2$ szerepe) mindegyikét választhatjuk, ez után a 0 részére a megmaradt 3 hely mindegyikét, és ezzel már kiadódott a két 16-os tag helyzete, tehát ezen előállítás tagjait $4 \cdot 3 = 12$ sorrendben sorolhatjuk fel.[1]

[1] Ezek a következők: 64, 16, 16, 0; 64, 16, 0, 16; 64, 0, 16, 16; 16, 64, 16, 0; 16, 64, 0, 16; 16, 16, 64, 0; 16, 16, 0, 64; 16, 0, 64, 16; 16, 0, 16, 64; 0, 64, 16, 16; 0, 16, 64, 16; 0, 16, 16, 64.

Másrészt az előállítás így is írható:

$$96 = 64 + 16 + 16 + 0 = (\pm 8)^2 + (\pm 4)^2 + (\pm 4)^2 + 0,$$

azért az első három tagban egymástól függetlenül $2 - 2$-féleképpen választhatjuk az alap előjelét, tehát az előjelváltozatok száma (minden egyes felsorolásban) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$. Ezek szerint a (18) előállítás az $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 96$ egyenletnek $N_{96} = 12 \cdot 2^3 = 96$ megoldását adja egész számokban.

Mivel pedig $n = 96 = 3 \cdot 2^5$, azaz páratlan törzsszám osztója csak a 3, azért pozitív páratlan osztóinak összege $1 + 3 = 4$, ennek 24-szerese $96 = N_{96}$. A tétel (páros számokra vonatkozó) állítását $n = 96$ esetében érvényesnek találtuk.

Az $n = 28$-at adó (10)–(12) előállítások mindegyikében hasonlóan 4-féle sorrend és $2^4$-féle előjelváltozat lehetséges, tehát az egyenlet megoldásainak száma $N_{28} = 3 \cdot 4 \cdot 2^4 = 192$. Másrészt $n = 28 = 7 \cdot 2^2$ alapján a tétel szerinti szám: $24(1 + 7) = 192 = N_{28}$.

$n = 84$ esetében a (13), (15) és (17) előállítások szerkezetükben megegyeznek a (10)–(12) alattiakkal. A (14) és (16) előállításoknak mind a négy tagja különböző, ezért első tagjuk helyét 4-féleképpen, 2-ik és 3-ik tagjuk helyét a még üres helyek közül 3-, ill. 2-féleképpen választhatjuk (és ezzel a 4-ik tag helyzete is meg van határozva), tehát tagjaik $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sorrendben írhatók. Az előjelváltozatok száma (14)-ben $2^4$, (16)-ban $2^3$. Ezek szerint a (13)–(17) előállítások az egyenlet számára $N_{84} = N_{28} + 24(2^4 + 2^3) = 768$ megoldást jelentenek. – Másrészt $n = 84 = 3 \cdot 7 \cdot 2^2$ alapján a pozitív páratlan osztók ugyanazok, mint $3 \cdot 7 = 21$ esetében, összegük: $1 + 3 + 7 + 21 = 32$. Az állítás itt is teljesül: $24 \cdot 32 = N_{84}$.

Hasonlóan $n = 25$-re az (1)–(3) előállítások $4 \cdot 2^1 + 4 \cdot 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2^4 = 248$ megoldást, $n = 105$-re pedig a (4)–(9) előállítások $2(4 \cdot 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^3) = 1536$ megoldást adnak, ugyanis az utóbbi esetben a (4) és (7), az (5) és (9), valamint a (6) és (8) előállítás-párok szerkezete a tagokban fellépő egyenlőségek és a 0-tagok szempontjából megegyező. Másrészt $25 = 5^2$ és $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, így pozitív osztóik összege $1 + 5 + 25 = 31$, ill. $1 + 3 + 5 + 7 + 15 + 21 + 35 + 105 = 192$. Ezekkel $8 \cdot 31 = 248$ és $8 \cdot 192 = 1536$, tehát a vizsgált páratlan esetekben is érvényesnek találtuk a tétel megfelelő állítását.

*Karsay Nóra* (Kiskunhalas, Szilády Á. g. II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az (1)–(18) előállítások felkutatásában úgy is eljárhatunk, hogy sorokra és oszlopokra rendezett táblázatban képezzük a 0, 1, 4, 9, ..., 100 négyzetszámokból álló *kéttagú* összegeket mindaddig, amíg át nem lépjük az adott $n$-értékek legnagyobbikát:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | . | . |
| [1] | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 | 37 | 50 | 65 | 82 | 101 | . | . |
| [4] | | 8 | 13 | 20 | 29 | 40 | 53 | 68 | 85 | 104 | . | . |
| [9] | | | 18 | 25 | 34 | 45 | 58 | 73 | 90 | . | . | . |
| [16] | | | | 32 | 41 | 52 | 65 | 80 | 97 | . | . | . |
| . | | | | | . | . | . | . | . | . | . | . |

(a bal alsó részt mellőztük, mert csak ismétlődéseket tartalmaz). Ezután az előfordult értékeket nagyság szerint rendezzük, most már az ismétlődéseket is tekintetbe véve:

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 13,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20,\ 25,\ 25,\ 26,\ \ldots$$

És mivel a négytagú összeg két kéttagú összege gyanánt írható, azért már csak azt kell vizsgálnunk, előállítható-e az adott $n$ e sorozat két tagjának összege gyanánt. Pl.

$$\begin{aligned} 25 &= 0 + 25 = 5 + 20 = 8 + 17 = 9 + 16, \text{ és így} \\ 25 &= 0 + 0 + 0 + 25 = 0 + 0 + 9 + 16 = 1 + 4 + 4 + 16 = \\ &= 4 + 4 + 1 + 16 = 0 + 9 + 0 + 16. \end{aligned}$$

(két előállítás kétszer is kiadódott).

Így több előkészítő munkát végeztünk, viszont egy csapásra $n$-nek minden 105-nél nem nagyobb értékére megkaphatjuk az előállításokat. Pl. $23 = 5 + 18 = 10 + 13$ alapján $23 = 1 + 4 + 9 + 9 = 1 + 9 + 4 + 9$.

*Baróti György* (Budapest, I. István g. III. o. t.)

2. A $4A$ alakú számoknak csupa páros négyzetszámból való előállításait nyilván egyszerűbben kaphatjuk, ha képezzük az $A$ szám összes előállításait és ezeket szorozzuk 4-gyel.