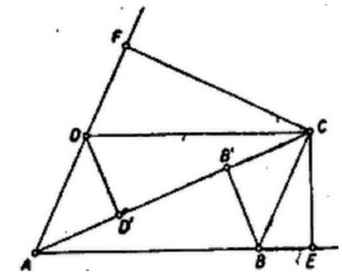
I. megoldás. $AC > BD$ miatt a paralelogrammának A-nál levő szöge és B, D-nél levő külső szöge hegyes szög, ezért E az AB oldal B-n túli, F az AD oldal D-n túli meghosszabbítására esik.



1. ábra

Az ACE és BCE derékszögű háromszögekből

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 + BC^2 - (AE - AB)^2,$$

(2) $$AC^2 = BC^2 + 2AB \cdot AE - AB^2.$$

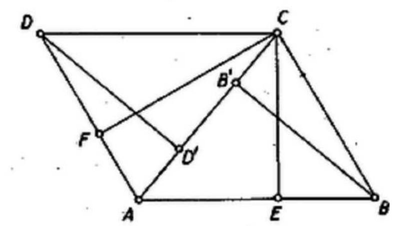
Hasonlóan az ACF és DCF derékszögű háromszögekből, $DF = AF - AD$ behelyettesítésével

(3) $$AC^2 = DC^2 + 2AD \cdot AF - AD^2.$$

Most már (2) és (3)-ból összeadással, $BC = AD$ és $DC = AB$ figyelembevételével, végül 2-vel osztva (1)-et kapjuk.

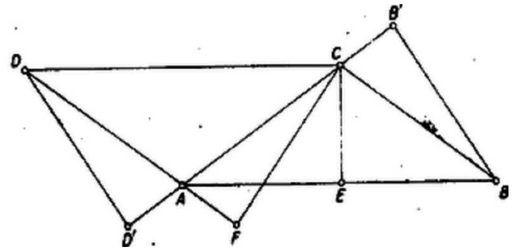
$AC = BD$ esetén a paralelogramma derékszögű, $E \equiv B$ és $F \equiv D$, így (1) a Pythagorász tételre egyszerűsödik.

$AC < BD$ esetén az ABC szög hegyesszög. Feltehetjük, hogy AB-vel a paralelogramma nem kisebb oldalát jelöltük: $AB \geq BC$. Másrészt $BE < BC$, így $BE < AB$, tehát E az AB szakaszon van. Ezért (2) itt is érvényes, mert BE felhasznált kifejezése helyére a (-1)-szerese lép, evvel azonban a négyzete nem változik meg.



2. ábra

Ugyanez áll (3)-ra is abban az esetben, ha F az AD szakaszra, esetleg éppen A-ba esik (2. ábra), ilyenkor tehát (1) érvényes. Az $F \equiv A$ esetben az ABC háromszög C-nél derékszögű és (1) az ismert mértani középarányos tételre egyszerűsödik: $AC^2 = AB \cdot AE$.



3. ábra

Ha F az AD oldal A-n túli meghosszabbítására esik, akkor $DF = AF + AD$ (3. ábra). Ezt $DF = -(-AF - AD)$ alakban írva (3) helyére a fenti módon

(3') $$AC^2 = DC^2 - 2AD \cdot AF - AD^2,$$

és folytatólag (1) helyére a következő lép:

$$AB \cdot AE - AD \cdot AF = AC \cdot AC \tag{1'}$$

(1)-et és $(1')$-t összefoglalva, egyszersmind a paralelogramma oldalaira tett megszorítást is feloldva (1)-et minden esetre érvényesnek mondhatjuk ki azzal a hozzáadással, hagy az AB, AD irányokat pozitívnak véve az AE, AF szakaszokat pozitív vagy negatív előjellel vesszük aszerint, hogy A-tól különböző végpontjuk A-nak a B-vel, ill. D-vel megegyező vagy ellentétes oldalán van.

Komlós György (Debrecen, Mechwart A. gépip. t. II. o. t.)

II. megoldás. Legyen B és D-nek AC-re való vetülete B', ill. D'. A közös hegyes szöggel bíró ACE és ABB' derékszögű háromszögek hasonlók, ezért

$$AE : AB' = AC : AB, \quad \text{amiből} \qquad (4) \qquad AB' = \frac{AB \cdot AE}{AC}.$$

Ugyanígy az ACF és ADD' háromszögek hasonlók, továbbá az ADD' és CBB' háromszögek egybevágók, tehát ACF és CBB' hasonlók. Ebből

$$AF : CB' = AC : CB \qquad \text{és} \qquad (5) \qquad CB' = \frac{CB \cdot AF}{AC} = \frac{AD \cdot AF}{AC}.$$

Az ABC szög tompaszög, ezért B' az AC szakaszon van. Így (4) és (5) összeadásával

$$AB' + B'C = AC = \frac{AB \cdot AE + AD \cdot AF}{AC},$$

ebből pedig AC-vel átszorozva (1)-et kapjuk.

Az $AC < BD$ (és $AB \geq BC$) esetre meg kell vizsgálnunk a paralelogramma középpontjára nyilvánvalóan tükrös B', D' pontpár helyzetét. Aszerint amint F az AD szakaszra, vagy ennek meghosszabbítására esik, a CAD szög hegyes-, ill. tompaszög, ezért D' az AC szakaszon, ill. ennek A-n túli meghosszabbításán van. *Csak az utóbbi helyzettel kell foglalkoznunk.* Ekkor $AC = AB' - CB'$, és ismét (1)-re jutunk.

Nagy László (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás a vektoralgebra módszerével is bizonyítható.

Máté Attila (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)