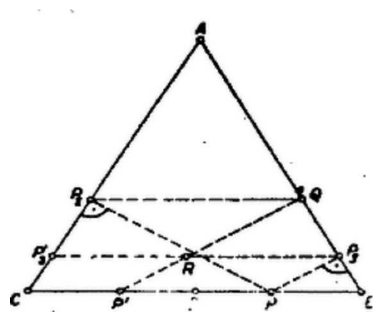
I. megoldás. Legyen a szabályos háromszög ABC, vegyük első, második, harmadik oldalnak rendre BC-t, CA-t, AB-t, és legyen a BC szakasz felezőpontja D. A szimmetria miatt elég az állítást a D kezdőpontú, B-n átmenő félegyenesen vett P kiindulópontokra igazolnunk. Legyen a két merőleges talppontja P_2, P_3, a párhuzamos metszéspontja Q, ekkor azt kell bebizonyítani, hogy $P_3Q = DP$.

Ha P a D-ben vagy a B-ben van, az állítás nyilvánvalóan igaz, mert az első esetben P_2 és P_3 tükrösek az AD tengelyre és így $Q \equiv P_3$, a másodikban pedig $P_3 \equiv B$, P_2 és Q oldalfelező pontok, és így mindkét szakasz $BC/2$-vel egyenlő.

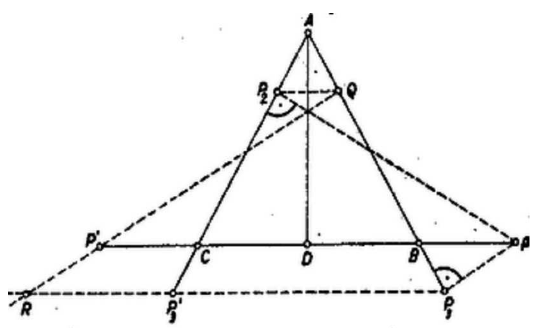
Ha P a DB szakasz pontja, akkor P_2 a CA szakaszon, Q és P_3 a BA szakaszon van. A PBP_3 és PCP_2 derékszögű háromszögek hasonlók ABD-höz, ezért $BP_3 = BP/2$, $CP_2 = CP/2$, továbbá a szimmetria miatt $BQ = CP_2$. Mivel $BP < CP$, és így $BP_3 < CP_2$, azért (1. ábra)

$$P_3Q = BQ - BP_3 = CP_2 - BP_3 =$$
$$= \frac{CP - BP}{2} = \frac{(CD + DP) - (BD - DP)}{2} = DP,$$

ugyanis $CD = BD$.



1. ábra



2. ábra

Ha P átlép CB-nek B-n túli meghosszabbítására, akkor P_2 a CA, Q pedig a BA félegyenesen adódik, P_3 pedig AB-nek B-n túli meghosszabbításán. Az előbbiekhez részben hasonlóan (2. ábra)

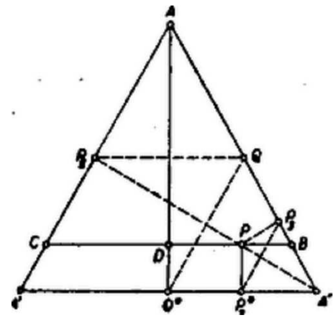
$$P_3Q = P_3B + BQ = P_3B + CP_2 =$$
$$= \frac{BP + CP}{2} = \frac{(DP - DB) + (CD + DP)}{2} = DP.$$

Eszerint az állítást minden figyelembe veendő esetben helyesnek találtuk.

Horváth Péter (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)

II. megoldás. P-nek csak a B és D-től különböző helyzeteivel foglalkozunk. Ábránkat AD-re tükrözve B és C, valamint P_2 és Q egymásba mennek át, legyen P és P_3 tükörképe (DC-n ill. CP_2-n) P', P_3', továbbá $P'Q$ és P_3P_3' metszéspontja R. Ekkor $P'Q \perp AB$, mint az AC-re merőleges PP_2 szakasz tükörképe, ezért $P'Q$ párhuzamos PP_3-mal. Így a PP_3RP' négyszög paralelogramma (mert $P_3R \parallel BC$ és $P_3R = PP' = 2DP$). Másrészt az RP_3Q háromszög hasonló ABD-hez, tehát $P_3Q = P_3R/2 = DP$.

Gáspár Sándor (Budapest, I. István g. II. o. t.)



3. ábra

III. megoldás. Legyen A-nak P_2-re és Q-ra való tükörképe A', ill. A''. Így P_2 és Q az $AA'A''$ háromszög oldalfelező pontjai, és P_2A'' átmegy P-n, mert $PP_2 \perp AA'$. Legyen Q és P_3 tükörképe $A''P_2$-re Q^*, P_3^* (3. ábra). Ekkor Q^* felezi $A'A''$-t, tehát rajta van az ABC és $AA''A'$ szabályos háromszögek közös AD tengelyén, ezért $DQ^* \perp BC$. Továbbá $PP_3^* \perp A'A'' \parallel BC$, mert PP_3^* az AB-re merőleges PP_3 tükörképe. Ezek szerint a $PDQ^*P_3^*$ négyszög téglalap, tehát $P_3Q = P^*Q^* = PD$.

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. g. I. o. t.)