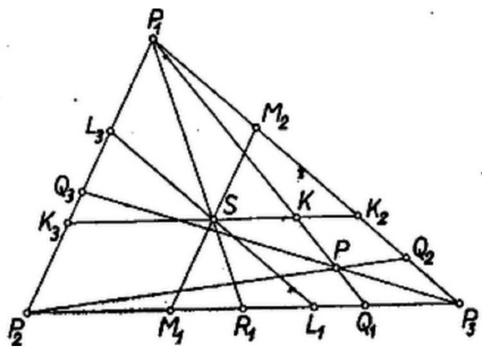
I. megoldás. Vizsgáljuk meg, hol fekszenek azok a P pontok, amelyekre pl. P_1P/PQ_1 éppen 2, annál kisebb, ill. annál nagyobb. Legyen a $P_1P_2P_3 = H$ háromszög P_2P_3 oldalának a felezőpontja R_1. A P_1R_1 súlyvonalon az S súlypontra lesz, mint ismeretes, a kivánt arány 2. Húzzunk S-en át párhuzamost H-nak P_2P_3 oldalával. Legyen ennek a P_1P_2, ill. P_1P_3 oldalon levő metszéspontja K_3, ill. K_2, és egy tetszés szerinti P_1Q_1 szakasznak a közös pontja K_2K_3-mal K. Ha P egybeesik K-val, akkor $P_1P/PQ_1 = P_1S/SR_1 = 2$. Ha P a P_1K szakaszon van, akkor

$$\frac{P_1P}{PQ_1} < \frac{P_1K}{KQ_1} = 2,$$

mert az első tört számlálója helyére nagyobb, nevezője helyére kisebb szakaszt írtunk. Végül ha P a KQ_1 szakaszon van, akkor hasonló meggondolással

$$\frac{P_1P}{PQ_1} > \frac{P_1K}{KQ_1} = 2,$$

mert, így $P_1P > P_1K$ és $PQ_1 < KQ_1$.



1. ábra

Megállapításainkat így is kimondhatjuk: A P_1P/PQ_1 hányados értéke kisebb ill. nagyobb 2-nél aszerint , hogy P a $P_1K_2K_3 = H_1$ háromszög belsejében, ill. a $P_2P_3K_2K_3 = T_1$ trapéz belsejében van, és a hányados értéke 2, ha P a H_1 és T_1 közös K_2K_3 határszakaszának pontja.

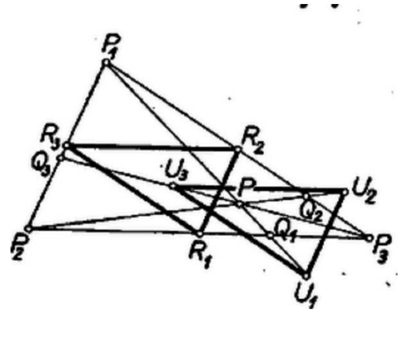
H-t az S-en átmenő, P_3P_1-gyel párhuzamos L_3L_1 szakasszal $P_2L_3L_1 = H_2$ és $P_3P_1L_3L_1 = T_2$ trapézra osztva hasonlóan kapjuk, hagy a P_2P/PQ_2 hányados értéke a H_2-beli P pontokra kisebb, a T_2-beliekre nagyobb 2-nél és az L_3L_1 szakaszon levő pontokra egyenlő 2-vel, továbbá hogy a P_1P/PQ_3 hányados a $P_3M_1M_2 = H_3$ háromszög pontjaira kisebb, a $P_1P_2M_1M_2 = T_3$ trapéz pontjaira nagyobb 2-nél, és az M_1M_2 szakaszon vett P-re egyenlő 2-vel, ha M_1M_2 átmegy S-en és párhuzamos P_1P_2-vel. Ezek alapján az állítás bizonyítására elég azt belátnunk, hogy H belsejében nincs olyan P pont, amely H-nak K_2K_3, L_3L_1 és M_1M_2-vel való kettévágásai során mindhárom esetben a trapéz belsejébe esnék, és olyan P sincs, amely mindháromszor a megfelelő H_1, H_2, ill. H_3-háromszög belsejébe esnék.

Valóban, a T_1 és T_2 trapézok közös részének, a $P_3K_2SL_1$ paralelogrammának belseje a H_3 háromszög belsejébe esik, tehát nincs közös pontja T_3-mal, és hasonlóan H_1 és H_2 közös részének, a K_3SL_3 háromszögnek belseje T_3 belsejébe esik, nincs közös pontja H_3-mal. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A bizonyításból az is következik, hogy ha P nem azonos a H háromszög súlypontjával, akkor a vizsgált arányok között van 2-nél nagyobb értékű is, 2-nél kisebb értékű is, mert S-et kivéve minden pont csak egy kettévágó szakaszhoz tartozik hozzá.

Kultsár Levente (Hajdúböszörmény, Bocskai I. g. II. o. t.)

II. megoldás. Az, hogy P_1P/PQ_1 a 2-nél kisebb, vele egyenlő, vagy nagyobb nála, úgy is fogalmazható, hogy $P_1P/2$ kisebb PQ_1-nél, egyenlő vele, vagy nagyobb nála. Így P_1P-t meghosszabbitva a P ponton túl a másfélszeresére, a keletkező U_1 végpont a PQ_1 szakasz, és így egyben a háromszög belsejében van, ill. egybeesik Q_1-gyel, ill. Q_1-en túl, tehát a háromszögön kívül van, amint P_1P/PQ_1 kisebb 2-nél, egyenlő vele, vagy nagyobb, mint 2. Hasonló érvényes a P_2P és P_3P szakasz P-n túl másfélszeresére nyújtásával keletkező U_2, U_3 végpontokra.



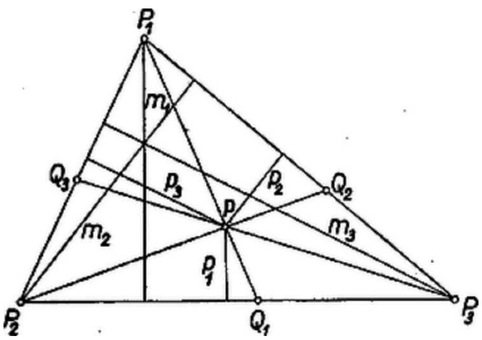
2. ábra

A feladat állítása ennek segítségével a következő módon fogalmazható át: az U_1, U_2, U_3 pontok nem lehetnek mind a H háromszögön kívül, sem nem lehetnek mind a háromszög belsejében. Ezt fogjuk bebizonyítani.

Az $U_1U_2U_3 = H_u$ háromszög H-ból előállítható P körül való $180°$-os forgatással és $1:2$ arányú egyidejű kicsinyítéssel. Ugyanez áll az oldalfelező pontok alkotta $R_1R_2R_3 = H_r$ háromszögre, forgatási középpontnak az S súlypontot véve. Eszerint H_u és H_r egybevágók, megegyező állásúak, egymásba eltolással átvihetők. Erre támaszkodva megmutatjuk, hogy ha U_1 és U_2 egyike sem belső pont, akkor U_3 belső pont. Ugyanis $U_1U_2 \neq R_1R_2$, ill. U_1U_2 nem párhuzamos R_1R_2; és ez csak úgy lehet, hogy U_1U_2 az R_1R_2-nek azon a partján van, mint P_3, mert U_1 és U_2 a P_1P_2 egyenesnek azon a partján van, mint R_1, R_2, így ha R_1R_2-nek ellenkező partján lenne U_1, U_2, mint P_3, akkor az U_1U_2 egyenesnek R_1R_2-nél hosszabb szakasza esnék H-ba, és így U_1 és U_2 közül legalább az egyik H belsejében volna. Így H_u-val együtt U_3 a P_1P_2-nek P_3-mal egyező partjára jut. Viszont szerkesztésénél fogva U_3 a P_2P_3-nak P_1-gyel egyező partján és P_1P_3-nak P_2-vel egyező partján van, tehát benne van H-ban.

Hasonlóan bizonyítható, hogy ha U_1 és U_2 egyike sem külső pont, akkor U_3 a P_1P_2 ellenkező partjára esik, mint P_3, s így H-n kívül van.

Földes Antónia (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)



3. ábra

III. megoldás. Húzzunk merőlegest P-ből a P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 oldalra, hosszuk legyen p_1, p_2, p_3, továbbá H megfelelő magasságai m_1, m_2, m_3. A keletkezett hasonló derékszögű háromszögek felhasználásával

$$\frac{P_iP}{PQ_i} = \frac{P_iQ_i - PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iQ_i}{PQ_i} - 1 = \\ = \frac{m_i}{p_i} - 1,$$

ahol i az 1, 2, 3 indexek bármelyikét jelentheti. Eszerint elegendő megmutatnunk, hogy az m_i/p_i arányok között van olyan, amelyik nem nagyobb, mint 3, és olyan is, amelyik nem kisebb 3-nál.

A PP_2P_3, PP_3P_1 és PP_1P_2 háromszögek területének összege egyenlő H-nak t területével. Ebből átalakítással

$$t = \frac{P_2P_3 \cdot p_1}{2} + \frac{P_3P_1 \cdot p_2}{2} + \frac{P_1P_2 \cdot p_3}{2} = \frac{P_2P_3 \cdot m_1}{2} \cdot \frac{p_1}{m_1} + \\ + \frac{P_3P_1 \cdot m_2}{2} \cdot \frac{p_2}{m_2} + \frac{P_1P_2 \cdot m_3}{2} \cdot \frac{p_3}{m_3} = t\left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} + \frac{p_3}{m_3}\right).$$

Eszerint a p_i távolságokra és az m_i magasságokra fennáll:

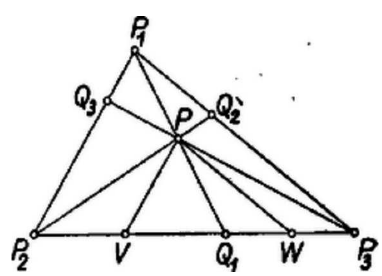
(1) $$\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} + \frac{p_3}{m_3} = 1.$$

Jelöljük a p_1/m_1, p_2/m_2, p_3/m_3 értékek közt előforduló legkisebb értéket α-val, az előforduló legnagyobbat β-val. Ekkor

$$3\alpha \leqq \frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} + \frac{p_3}{m_3} \leqq 3\beta.$$

Így (1)-ből következik, hogy $\alpha \leqq 1/3$, $\beta \geqq 1/3$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szentai Judit (Budapest, Kanizsai Dorottya lg. I. o. t.)



4. ábra

IV. megoldás. Tegyük fel, hogy a P_2P/PQ_2 és P_3P/PQ_3 arányok értéke nem kisebb 2-nél. Megmutatjuk, hogy ekkor P_1P/PQ_1 nem nagyobb 2-nél. Húzzunk P-n át párhuzamost P_1P_2-vel és P_1P_3-mal, és legyen ezeknek P_2P_3-mal való metszéspontja V, ill. W. A P_2PW, $P_2Q_2P_3$ és a P_3PV, $P_3Q_3P_2$ háromszög-párok hasonlósága és a feltevés alapján, mindjárt átalakítással

$$\frac{P_2P}{PQ_2}=\frac{P_2W}{WP_3}\geqq 2,\qquad \frac{P_3P}{PQ_3}=\frac{P_3V}{VP_3}\geqq 2.$$

Az egyenlőtlenségek mindkét oldalához 1-et adva

$$\frac{P_2W+WP_3}{WP_3}=\frac{P_2P_3}{WP_3}\geqq 3,\qquad \frac{P_3V+VP_3}{VP_2}=\frac{P_2P_3}{VP_2}\geqq 3,$$

ezért $WP_3\leqq P_2P_3/3$, $VP_2\leqq P_2P_3/3$, és így

$$VW=P_2P_3-P_3W-P_2V\geqq P_2P_3-\frac{2P_2P_3}{3}=\frac{1}{3}\cdot P_2P_3. \tag{2}$$

Feltehetjük, hogy a betűzés olyan, hogy $VQ_1\geqq Q_1W$. Ekkor $VQ_1\geqq VW/2\geqq P_2P_3/6$, és így

$$\frac{P_1P}{PQ_1}=\frac{P_2V}{VQ_1}\leqq\frac{\frac{P_2P_3}{3}}{\frac{P_2P_3}{6}}=2.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

Hasonlóan nyerjük, hogy ha a vizsgálandó arányok közül kettőnek az értéke nem nagyobb 2-nél, akkor a harmadiké nem kisebb 2-nél.

Gerencsér László (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)