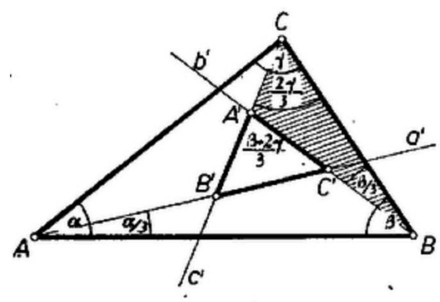
Jelöljük az adott H háromszög A, B, C csúcsánál levő α, β, γ szög első harmadolóját rendre a', b', c'-vel, továbbá a' és b' metszéspontját C'-vel, b' és c'-ét A'-vel, c' és a' metszéspontját B'-vel. Ekkor az $A'B'C' = H'$ háromszög A'-nél, B'-nél és C'-nél levő szöge, mint az $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ háromszög külső szöge, így fejezhető ki:

$$B'A'C'\sphericalangle = \alpha' = \frac{\beta+2\gamma}{3}, \qquad C'A'B'\sphericalangle = \beta' = \frac{\gamma+2\alpha}{3}, \tag{1}$$
$$A'C'B'\sphericalangle = \gamma' = \frac{\alpha+2\beta}{3}.$$



Feltehetjük, hogy a betűzést úgy választottuk, hogy H-nak nincs sem α-nál kisebb, sem γ-nál nagyobb szöge, vagyis hogy

$$\alpha \le \beta \le \gamma.$$

Így H' szögei között α'-nél nagyobb semmi esetre sincs, hiszen α'-ből β' is, γ' is csökkentéssel vagy változatlanul hagyással állítható elő:

$$\alpha' = \frac{1}{3}(\beta+\gamma+\gamma) \ge \frac{1}{3}(\alpha+\alpha+\gamma) = \beta',$$
$$\ge \frac{1}{3}(\beta+\beta+\alpha) = \gamma'.$$

Eszerint, ha H és H' szögei páronkint megegyeznek, akkor

$$\alpha' = \gamma, \quad \text{azaz} \quad \frac{\beta+2\gamma}{3} = \gamma, \quad \text{amiből} \quad \beta = \gamma.$$

Így β' és γ' közül β' nem lehet a nagyobb, mert

$$\gamma' - \beta' = \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta - \gamma - 2\alpha) = \frac{1}{3}(\beta - \alpha),$$

ez pedig nem lehet negatív. Tehát

$$\beta' = \alpha \quad \text{és} \quad \gamma' = \beta,$$

amiből (1) felhasználásával

$$\frac{\gamma+2\alpha}{3} = \alpha, \quad \gamma = \alpha, \quad \text{ill.} \quad \frac{\alpha+2\beta}{3} = \beta, \quad \alpha = \beta,$$

vagyis H szabályos háromszög. Így viszont (1) szerint $\alpha' = \beta' = \gamma'$, tehát H' is szabályos háromszög. Ezt kellett bizonyítanunk.

Darabos Zsuzsanna (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)
dolgozata alapján.

Megjegyzés. Számos versenyző tévesen azt bizonyította, hogy ha H szabályos, akkor H' is szabályos.