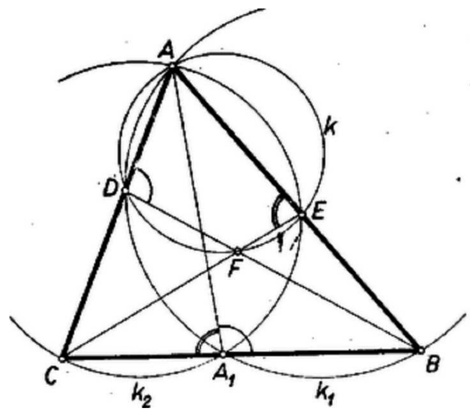
Első meggondolásunkat az 1. ábra helyzetéhez kapcsoljuk, amelyen D az AC szakaszon, E az AB szakaszon van. Ekkor F az ABC háromszög belsejében adódik. Megmutatjuk, hogy az ADF és AEF szögek összege 180°, ebből következik, hogy A, D, F, E egy kör pontjai.



1. ábra

D az ABA_1 háromszög k_1 körülírt körén van, éspedig AB-nek ugyanazon oldalán, mint A_1, ezért

$$ADF\sphericalangle = ADB\sphericalangle = AA_1B\sphericalangle. \tag{1}$$

Másrészt E az ACA_1 háromszög k_2 körülírt körén van és AC-nek A_1-gyel megegyező oldalán, ezért

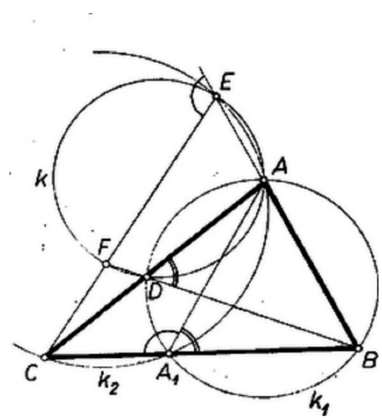
$$AEF\sphericalangle = AEC\sphericalangle = AA_1C\sphericalangle. \tag{2}$$

Ezek szerint

$$ADF\sphericalangle + AEF\sphericalangle = AA_1B\sphericalangle + AA_1C\sphericalangle = 180^\circ,$$

amit bizonyítani akartunk.

Azokra az esetekre, ha D és E egyike vagy mindkettőjük kívül adódik az AC, ill. AB oldalszakaszon, bizonyításunkon kisebb, a lényegbe nem vágó módosításokat kell tennünk.



2. ábra

Ha D az AC szakaszon adódik, E viszont az AB szakaszon kívül, akkor E csak AB-nek A-n túli meghosszabbításán lehet, mert B a k_2 körre nézve külső pont, hiszen a BC egyenesnek k_2-vel közös pontjai: C és A_1, a B-nek ugyanazon oldalán vannak. Így D az AC szakaszon, a BCE háromszög belsejében van, F pedig a CE szakaszon, tehát D szétválasztja a B, F pontokat. Ekkor (1) és (2) így módosulnak (2. ábra):

$$ADF\sphericalangle = 180^\circ - ADB\sphericalangle = 180^\circ - AA_1B\sphericalangle, \tag{1'}$$

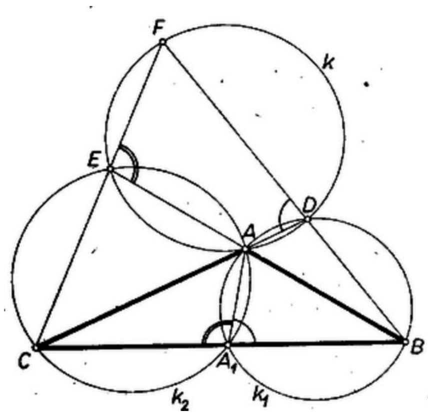
$$AEF\sphericalangle = AEC\sphericalangle = 180^\circ - AA_1C\sphericalangle, \tag{2'}$$

ugyanis E és A_1 most az AC egyenes két különböző oldalán állnak. Összeadással ismét

$$ADF\sphericalangle + AEF\sphericalangle = 360^\circ - (AA_1B\sphericalangle + AA_1C) = 180^\circ.$$

Ha E adódik belső pontnak és D külsőnek, akkor felcserélve a B és C betűket és következésképpen D, E-t is – a most vizsgált esetre jutunk.

Ha pedig D és E mindegyike kívül adódik az AC, ill. AB szakaszon, akkor az előbbi esethez hasonlóan az oldalszakaszok A-n túli meghosszabbításán vannak, vagyis az AB, AC egyenesnek A_1-gyel ellentétes oldalán (3. ábra). Ekkor először F helyzetét kell tisztáznunk.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy F az AB egyenesnek A_1-gyel ellentétes oldalán van, mert a BD és CE egyeneseknek AB-vel bezárt szögei azon az oldalon adnak 180°-nál kisebb összeget. A BD és AB közti szög egyenlő az AA_1D szöggel, a CE és AB közti szög pedig E-nél levő külső szöge az EAA_1C húrnégyszögnek, és így egyenlő a CA_1A szöggel. Ezért összegük egyenlő a CA_1D szöggel, ez pedig kisebb 180°-nál, mert D és A a BC-nek ugyanazon oldalán vannak.

Most már a fentebbiekhez hasonlóan

$$ADF\sphericalangle = 180^\circ - ADB\sphericalangle = AA_1B\sphericalangle, \tag{1''}$$
$$AEF\sphericalangle = 180^\circ - AEC\sphericalangle = AA_1C\sphericalangle, \tag{2''}$$

tehát összegük 180°.

Ha D, vagy E egybeesik A-val (k_1 érinti AC-t, vagy k_2 érinti AB-t), akkor az állítás semmitmondóvá válik.

Szentai Judit (Budapest, Kanizsay Dorottya lg. I. o. t.)

Megjegyzés. Az 1. ábra helyzetében megmutatjuk, hogy az A_1 pontnál levő szögek felhasználását el lehet kerülni.

$$\begin{gathered}
ADF\sphericalangle + AEF\sphericalangle = ADA_1\sphericalangle - \\
- BDA_1\sphericalangle + AEA_1\sphericalangle - CEA_1\sphericalangle = \\
= (180^\circ - ABC\sphericalangle) - BAA_1\sphericalangle + \\
+ (180^\circ - ACB\sphericalangle) - CAA_1\sphericalangle = 180^\circ + \\
+ \big[180^\circ - ABC\sphericalangle - ACB\sphericalangle - \\
- (BAA_1\sphericalangle + A_1AC\sphericalangle)\big] = 180^\circ.
\end{gathered}$$

Marosi Judit (Budapest, Berzsenyi D. lg. II. o. t.)