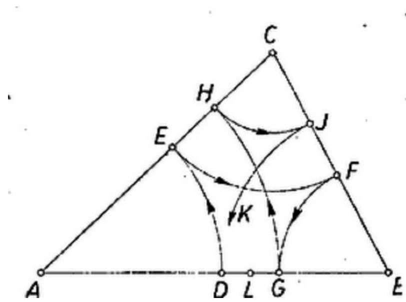
I. megoldás. A feladatot puszta számítással megoldhatjuk. Legyen $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ és $AD=AE=x$, ekkor

$CE=b-x=CF,\quad BF=a-CF=a-(b-x)=BG,$
$AG=c-BG=c-\big[a-(b-x)\big]=AH,$
$CH=b-AH=b-\Big[c-\big[a-(b-x)\big]\Big]=CJ,$
$BJ=a-CJ=a-\Big\{b-\Big[c-\big[a-(b-x)\big]\Big]\Big\}=BK,$ végül
$AK=c-BK=c-\Big\{a-\big\{b-\Big[c-\big[a-(b-x)\big]\Big]\big\}\Big\}.$



1. ábra

Itt az a, b, c oldalak 2–2 előfordulása között három zárójel áll, mínusz jellel megelőzve, ezek tehát kiesnek, az x előtt pedig 6 mínusz jel áll, tehát $AK=x=AD$, így $K\equiv D$.

A DG szakasz L felezőpontjára

$$AL=\frac{1}{2}(AG+AD)=\frac{1}{2}(c-a+b).$$

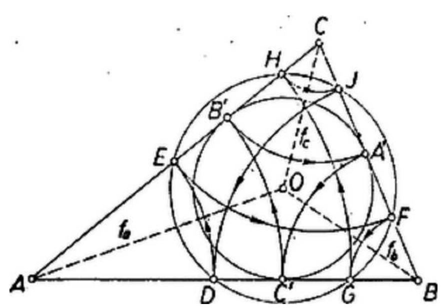
Ezt véve x gyanánt AG fenti kifejezéséből

$$AG'=(c-a+b)-x=\frac{1}{2}(c-a+b)=AL,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Csirik János (Orosháza, Táncsics M. Gimn. II. o. t.)

II. megoldás. Tekintsük a háromszögbe írt kört, és jelöljük az AB, BC, CA oldalon levő érintési pontját C', A', B'-vel. Ekkor $AC'=AB'$, $CB'=CA'$, $BA'=BC'$, ha tehát D gyanánt C'-ből indulunk ki, akkor E a B'-be, F az A'-be és G a C'-be esik. Így a szerkesztés–sorozat 3. lépésével visszajutunk kiindulási pontunkba, ugyanígy minden további harmadikkal, tehát a hatodikkal is.



2. ábra

Legyen most D az AC' szakasz egy belső pontja, és tegyük fel, hogy E, F, G, H, J, K mindegyike a háromszög kerületén van. Akkor E a $B'A$ félegyenesen van, F az $A'B$-n, G pedig $C'B$-n. Továbbá a $C'B'$ és DE körívek közös középpontja A, és hasonlóan további két–két körív középpontja C, ill. B, ezért $DC'=EB'=B'E=A'F=FA'=GC'$. Eszerint a sorozat 3. lépésével G a D-nek C'-re való tükörképe. Ugyanígy látható be, hogy K a G-nek C'-re való tükörképe, tehát azonos D-vel. Ez az első bizonyítandó állítás.

Eredményünk szerint az L pont azonos C'-vel, ezt az esetet már fent megvizsgáltuk. Tehát D megválasztásától függetlenül egyetlen olyan pont van AB-n, melyből kiindulva a 3. lépésben érkezünk vissza.

Corradi Gábor (Győr, Czuczor G. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy, a koncentrikus körívpárok sugarai különbségének egyenlőségével is bizonyíthatjuk az állítást: $DG=EH=FJ=GK$, csak még azt kell belátnunk, hogy D és K a G-nek ugyanazon oldalán vannak.

Varga Kornél (Győr, Révai M. Gimn. I. o. t.)

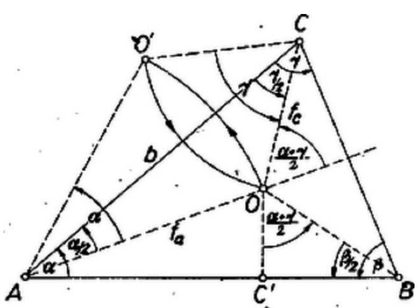
III. megoldás. Az E pont a D tükörképe a BAC szög f_a felezőjére vonatkozóan, és minden további pont is tükörképe az őt megelőzőnek a háromszög megfelelő szögfelezőjére. Eszerint D-t egymás után 6-szor tükröztük az egymást a beírt kör O középpontjában metsző f_a, f_c, f_b, f_a, f_c, f_b egyenesekre. Így pedig a 6-ik tükörkép a 651. gyakorlat II. megoldása[1] szerint azonos a kiindulási ponttal.

A tükörképekből az is következik, hogy mindegyik szerkesztett pont egyenlő távolságra van O-tól, az O körül OD sugárral írt kör átmegy E, F, G, H, J-n. Eszerint D-t megválasztva a többi pontok csak e körnek az oldalakkal való metszéspontjai közül kerülhetnek ki. Mármost a DG húrnak O-hoz legközelebbi pontja az L felezőpont. L-ből kiindulva az OL sugarú körnek csak egy közös pontja van AB-vel, ezért a 3. lépés visszavezet L-be.

Lehel Csaba (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. Az első állítás minden kör köré írható sokszögre érvényes. Ez belátható, ha továbbfejlesztjük a fenti meggondolást, valamint azt a megállapítást, amit az idézett megoldás mond ki az egy ponton átmenő egyeneseken ciklikus sorrendben történő 2-szeri tükrözésre. Ugyancsak érvényes a második állítás is páratlan oldalszámú érintősokszögekre; páros oldalszám esetén viszont már az első körüljárás mindig visszavisz a kiindulási pontba (a G-nek megfelelő pont azonos D-vel).

Lehel Csaba



3. ábra

IV. megoldás. A 651/II. megoldás segédtételének felhasználásával a végzett 3 forgatást egyetlen forgatássá tehetjük össze. Az A csúcs körül az óramutató járásával ellentétes (vagyis pozitív) irányú $BAC\sphericalangle = \alpha$ szögű forgatást a segédtétel szerint tekinthetjük bármely két olyan tengelyen való egymás utáni tükrözés eredményének, melyek közös pontja A, és az első tengelyt a másodikba $+\alpha/2$ forgás viszi át. Első tengelynek f_a-t véve a második az $AC = b$ egyenes. Ugyanúgy a C körüli $ACB\sphericalangle = +\gamma$ szögű forgatást helyettesíthetjük a b és f_c tengelyeken való tükrözéssel. Így a két forgatás végeredményét az f_a, b, b, f_c tengelyeken való egymás utáni tükrözés is megadja. Ámde a b tengelyen való (egymás utáni) kétszeri tükrözés minden pontot önmagába visz vissza, hatása nincs, ezért a két forgatás eredménye az f_a-n, majd f_c a való tükrözés. Ez pedig – ismét a segédtétel szerint – egyetlen forgatás a tengelyek O metszéspontja körül, éspedig $a + \gamma$ szöggel, mert az f_a-t f_c-be vivő pozitív forgás egyenlő az ACO háromszög O-nál levő külső szögével, $(a + \gamma)/2$-vel.[2]

Eszerint általában a Φ_1 és Φ_2 pontok körül φ_1, ill. φ_2 szöggel végzett forgatás eredménye (ha $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 0^\circ, \pm 360^\circ$) az az egyetlen forgatás, melynek Φ középpontja annak a két félegyenesnek a metszéspontja, amely a $\Phi_1\Phi_2$ szakasszal Φ_1-ben $-\varphi_1/2$, ill. Φ_2-ben $+\varphi_2/2$ szöget zár be, a forgatás szöge pedig $\varphi_1 + \varphi_2$.

Ennek alapján a B körüli, $CBA\sphericalangle = \beta$ szögű forgatást az első kettő eredményéhez adva a forgatási középpont O-nak az AB oldalon levő C' vetülete, a forgatási szög pedig $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$, vagyis az eredmény a C' pontra való tükrözés: $DC' = C'G$. Ugyanis $OBC'\sphericalangle = +\beta/2$, így a BOC' szög nagysága $90^\circ - \beta/2 = (\alpha + \gamma)/2$, iránya pedig negatív.

A további 3 forgatás végeredményeként G ismét visszajut D-be. Másrészt $L \equiv C'$, tehát L már 3 forgatással visszajut eredeti helyzetébe.

V. L.

Megjegyzések. 1. A számításban természetesen negatív eredmények is adódhatnak. Ha pl. E az AC szakasz C-n túli meghosszabbítására esik: $AE = x > AC = b$, akkor CE és CF negatívok. A számítás azt mutatja, hogy az állítás akkor is helyes, ha az ilyen szakaszokat ellentétes irányban mérjük fel, vagyis – a példát folytatva – CE-t BC-nek C-n túli meghosszabbítására. Ehhez az eredményhez jutunk akkor is, ha a forgatásokat mindig $+\alpha$, $+\gamma$, $+\beta$ szöggel végezzük, valamint ha a pontokat forgatás helyett a (belső) szögfelezőn való tükrözéssel jelöljük ki.

2. A számításból nyilvánvaló, hogy állításaink páratlan oldalszámú sokszögekre akkor is érvényesek, ha azokba nem írható kör.

[1] K. M. L. 23 (1961/9) 20. o.

[2] Valóban, ha O tükörképe AC-re O', akkor $OAO'\sphericalangle = 2OAC\sphericalangle = \alpha$, $OCO'\sphericalangle = \gamma$, tehát O-t az első forgatás O'-be viszi, O'-t pedig a második forgatás O-ba, tehát a két transzformáció eredményeként O visszajut eredeti helyére. Másrészt az irányok $+\alpha$, $+\gamma$ szöggel való elfordulásának összege $+(a + \gamma)$, szöggel való elfordulás.