I. megoldás. A kérdésre a választ úgy keressük, hogy az adott egyenlőséghez hozzákapcsoljuk a minden derékszögű háromszögre fennálló

$$a^2+b^2=c^2, \tag{2}$$
$$ab=cm=2t \tag{3}$$

egyenlőségeket (ahol c az átfogó és t a háromszög területe), és a nyert 4 ismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk. Ha van megoldás, akkor válaszunk *igen.* Előre látható, hogy határozott megoldást nem kaphatunk, hiszen csak 2 ismeretlent küszöbölhetünk ki. Várható azonban, hogy az ismeretlenek arányát, a háromszög alakját meghatározhatjuk. Ugyanis (1)–(3) egyikében sincs ismeretlent nem tartalmazó tag, továbbá (1) négyzetre emelése után egyenleteink mindegyikében minden tag fokszáma ugyanannyi (szokásos kifejezéssel: mindegyik egyenlet homogén). (1)-ből

$$25m^2=9b^2-16a^2. \tag{1'}$$

Küszöböljük ki a rendszerből m-et és c-t. (3)-ból (2) figyelembevételével

$$m^2=\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

és így $(1')$-ből átszorzással

$$25a^2b^2=(a^2+b^2)(9b^2-16a^2)=-16a^4-7a^2b^2+9b^4,$$
$$16a^4+32a^2b^2-9b^4=0.$$

Mindkét oldalhoz $25b^4$-t adva a bal oldal teljes négyzet, éspedig pozitív érték négyzete: $\left(4a^2+4b^2\right)^2=25b^4$, tehát $4a^2+4b^2=5b^2$, amiből $4a^2=b^2$, és mivel a és b is pozitív, $2a=b$, $b:a=2$.

Eszerint van a kérdéses tulajdonsággal bíró háromszög.

Torda Zsuzsa (Budapest, Berzsenyi D. lg. I. o. t.)

II. megoldás. Más alakban jellemezhetjük a háromszöget, ha (1)-höz (2) és (3) helyett a velük lényegében egyenértékű

$$m^2=c_1c_2,\qquad a^2=cc_1,\qquad b^2=cc_2,\qquad c_1+c_2=c$$

egyenleteket kapcsoljuk hozzá. Itt c_1 és c_2 az a és b vetülete az átfogón. Így több egyenlet révén, de egyszerűbben, csak másodfokú egyenlet megoldásával jutunk eredményhez. Első három segédegyenletünk alapján $(1')$ négyzetes tagjait, majd a negyedik alapján c^2-t kiküszöbölve:

$$25c_1c_2=9cc_2-16cc_1;$$
$$25c_1(c-c_1)=9c(c-c_1)-16cc_1,$$
$$25c_1^2-50cc_1+9c^2=0,\qquad \text{amiből}\qquad (5c_1-5c)^2=4c^2,$$

és mivel $c_1<c$, azért $-5c_1+5c=4c$, $c_1=c/5$. Ekkor $c_2=4c/5$, tehát (1) akkor áll, ha m talppontja az átfogót $1:4$ arányban osztja két részre.

Tihanyi László (Budapest, Petőfi S. g. I. o. t.)